



N° d'ordre:

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité : Mathématiques

par

Emmanuel MILITON

Fragmentation et propriétés algébriques des groupes d'homéomorphismes École doctorale Mathématiques de la région Paris Sud

Soutenue le 26 octobre 2012 devant la Commission d'examen:

M	François BÉGUIN	(Examineur)
M	Étienne GHYS	(Rapporteur)
M	Patrice LE CALVEZ	(Examineur)
M.	Frédéric LE ROUX	(Directeur de thèse)
M	Frédéric PAULIN	(Examineur)
M	Pierre PY	(Examineur)

Rapporteurs:

- M. Etienne GHYS
- M. Shigenori MATSUMOTO



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à diverses propriétés algébriques des groupes d'homéomorphismes et de difféomorphismes de variétés. On appelle fragmentation la possibilité d'écrire un homéomorphisme en tant que composé d'homéomorphismes supportés dans des boules. Tout d'abord, nous étudions la longueur des commutateurs sur le groupe des homéomorphismes du tore et de l'anneau, ainsi que la norme de fragmentation, qui associe à tout homéomorphisme le nombre minimal de facteurs nécessaires pour écrire cet homéomorphisme en tant que composé d'homéomorphismes supportés dans des boules. Dans une deuxième partie de la thèse, nous abordons une autre propriété algébrique des groupes d'homéomorphismes et de difféomorphismes : la distorsion. Celle-ci est reliée de manière surprenante à des propriétés de fragmentation des homéomorphismes.

Mots-clefs : difféomorphisme, dynamique topologique, groupes de transformation, homéomorphisme, surfaces, systèmes dynamiques, théorie géométrique des groupes.

FRAGMENTATION AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF HOMEOMORPHISMS GROUPS

Abstract

In this thesis, we are interested in various algebraic properties of groups of homeomorphisms and diffeomorphisms of manifolds. We call fragmentation the possibility to write a homeomorphism as a composition of homeomorphisms supported in balls. First, we study the commutator length on the group of homeomorphisms of the torus and of the annulus, as well as the fragmentation norm, which associates to any homeomorphism the minimal number of factors necessary to write this homeomorphism as a composition of homeomorphisms supported in balls. In a second part of this thesis, we deal with another algebraic property of homeomorphism and diffeomorphism groups: the distortion. This last notion is surprisingly related to fragmentation properties of homeomorphisms.

Keywords : diffeomorphism, dynamical systems, geometric group theory, homeomorphism, surfaces, topological dynamics, transformation groups.

Remerciements

Je remercie Frédéric Le Roux à divers titres. Tout d'abord pour sa disponibilité constante tout au long de cette thèse. Ensuite pour m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant et pour avoir su me poser de bonnes questions. Enfin, pour sa relecture minutieuse du présent texte et en particulier des passages les plus ardues de celui-ci. Il a su me transmettre une petite partie de son immense intuition géométrique, intuition que j'étais loin d'avoir au début de cette thèse.

Je souhaite également témoigner de ma gratitude envers Étienne Ghys et Shigenori Matsumoto pour avoir accepté de rapporter ma thèse, malgré tout technique par endroits. Je suis honoré qu'ils aient pu donner de leur temps pour relire ce manuscrit.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance envers François Béguin, Patrice Le Calvez, Frédéric Paulin et Pierre Py pour avoir accepté d'être membres de mon jury de thèse. Je suis honoré qu'ils viennent assister à ma soutenance.

Merci aux membres de l'équipe de topologie et dynamique avec lesquels j'ai pu discuter et enrichir ma culture mathématique.

Merci à l'équipe de mathématiques de l'IUT d'informatique d'Orsay grâce à laquelle mon enseignement s'est passé dans de bonnes conditions.

Merci à tous les doctorants d'Orsay qui m'ont permis de traverser ces trois années de thèse dans une bonne ambiance.

Merci à mes colocataires Bernardo et JP. J'ai pu avoir avec Bernardo de longues conversations mathématiques (toutes mes excuses à JP...).

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Longueur des commutateurs et norme de fragmentation	11
1.2	Éléments de distorsion	16
1.3	Morphismes entre groupes d'homéomorphismes	21
I	Longueur des commutateurs et norme de fragmentation	24
2	Norme de fragmentation sur l'anneau ouvert	27
3	Norme de fragmentation sur le tore	36
3.1	Fragmentation et ensemble de rotation	36
3.1.1	Preuve de la proposition 3.3	37
3.1.2	Preuve de la proposition 3.2	37
3.1.3	Conséquences	39
3.2	Un peu plus sur la fragmentation dans le tore	39
4	Commutator length of diffeomorphisms of the closed annulus	45
4.1	Introduction	45
4.2	Quasimorphisms on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$	47
4.3	Estimation of the commutator length	49
4.3.1	Lower bound of the commutator length for $r = 0$	50
4.3.2	Upper bound of the commutator length for $r = 0$	50
4.3.3	Case $r > 0$	53
4.4	Estimation of the fragmentation norm	54
4.4.1	Fragmentation norm on $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$	54
4.4.2	Proof of Proposition 4.3	55

4.5	Generalization to other surfaces	56
4.5.1	Case of open surfaces	57
4.5.2	Case of other compact oriented surfaces with boundary	57
 II Éléments de distorsion dans les groupes d'homéomorphismes et de difféomorphismes		60
5	Éléments de distorsion de $\text{Diff}_0^\infty(M)$	63
5.1	Énoncé des résultats	63
5.2	Résultat	63
5.3	Démonstration du théorème	64
5.4	Démonstration du lemme	65
5.5	Démonstration du deuxième lemme	66
6	Éléments de distorsion des homéomorphismes de surfaces	70
6.1	Introduction	70
6.2	Notations et résultats	70
6.3	Quasi-isométries	74
6.4	Distorsion et fragmentation sur les variétés	80
6.5	Cas des surfaces à bord	89
6.6	Cas du tore	97
6.7	Cas des surfaces de genre $g \geq 2$	103
6.7.1	Quelques lemmes combinatoires	104
6.7.2	Preuve du lemme 6.29	109
6.7.3	Preuve du lemme 6.30	120
6.7.4	Preuve des lemmes combinatoires	122
6.8	Des éléments de distorsion de croissance d'orbite rapide	126
6.9	Généralisation des résultats	134
 III Morphismes de groupes entre groupes d'homéomorphismes		137
7	Actions de gros groupes sur le cercle	141
7.1	Introduction et notations	141

7.2	Preuve du théorème 7.1.1	143
A	Appendice : perfection locale de $\text{Diff}_0^\infty(M)$	149
B	Appendix : a C^0-fragmentation lemma for diffeomorphisms	152

Chapitre 1

Introduction

Pour une variété différentiable M et un entier r de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on cherche à étudier le groupe $\text{Diff}^r(M)$ des C^r -difféomorphismes de M muni de la composition (si $r = 0$, il s'agit du groupe des homéomorphismes de M que l'on notera aussi $\text{Homeo}(M)$). Comme dans le cadre de l'étude de tout groupe, la première chose à faire est de chercher les sous-groupes distingués de $\text{Diff}^r(M)$ pour ramener l'étude de ce groupe à celui de deux groupes plus petits, à savoir le sous-groupe en question et le quotient par ce sous-groupe distingué. La topologie de convergence C^r sur les compacts fait du groupe $\text{Diff}^r(M)$ un groupe topologique. Tout groupe topologique admet un sous-groupe distingué naturel qui est la composante connexe de l'identité de ce groupe. Dans le cas des variétés M compactes, on notera $\text{Diff}_0^r(M)$ la composante connexe de l'identité du groupe $\text{Diff}^r(M)$ ($\text{Homeo}_0(M)$ dans le cas $r = 0$) : il s'agit du sous-groupe des difféomorphismes f de M isotopes à l'identité, en ce sens qu'il existe un chemin continu de difféomorphismes dans $\text{Diff}_0^r(M)$ qui joint l'identité au difféomorphisme f . L'étude du groupe $\text{Diff}^r(M)$ se ramène donc à l'étude de deux groupes. Le premier est le groupe des difféotopies $\text{Diff}^r(M)/\text{Diff}_0^r(M)$ dont nous ne parlerons pas dans ce texte : notons cependant que l'étude de ce groupe dans le cas où la variété M est une surface est très développée. On peut alors se demander si le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ a des sous-groupes distingués. Un théorème important répond par la négative à cette question dans la plupart des cas (voir [6], [9], [22], [39], [40]) :

Théorème. (*Fischer, Mather, Thurston*) *Pour une variété compacte sans bord M et pour $r \neq \dim(M) + 1$, le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ est simple.*

Ce théorème est dû à Fischer dans le cas $r = 0$, à Thurston dans le cas $r = \infty$ et à Mather dans le cas de la différentiabilité finie. On fera très souvent usage de ce théorème dans ce texte, la plupart du temps de manière implicite. Comme nous allons fréquemment utiliser ce théorème dans la suite, nous allons donner une idée de la preuve de celui-ci. On fixe un recouvrement ouvert \mathcal{U} de la variété M constitué d'intérieurs de « bonnes » boules fermées¹ plongées dans M (toutes les boules ouvertes que nous considérerons posséderont cette propriété). Tout difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(M)$ s'écrit

1. Une bonne boule fermée est ici l'image par un plongement de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$ dans M de la boule unité fermée.

comme composée d'un nombre fini de difféomorphismes supportés² chacun dans l'un des ouverts de \mathcal{U} : si $r \geq 1$, cela est vrai pour un difféomorphisme proche de l'identité d'après la proposition B.1 de l'appendice 2 et un argument de connexité implique que c'est vrai pour tout difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(M)$. Dans le cas $r = 0$, la preuve de ce dernier fait est due à Fischer (voir [22] et [9]). De plus, tout difféomorphisme de \mathbb{R}^d à support compact s'écrit comme un produit de commutateurs de difféomorphismes à support compact de \mathbb{R}^d . Cette dernière étape est très facile dans le cas $r = 0$ (voir par exemple le lemme 6.21) mais beaucoup moins évidente dans les autres cas. Thurston a montré ceci dans le cas $r = \infty$ et Mather dans le cas $r \neq \dim(M) + 1$. Le cas $r = \dim(M) + 1$ est encore ouvert à l'heure actuelle. Pour une preuve moderne dans le cas $r = \infty$, le lecteur est invité à consulter l'appendice 1.

Fixons un difféomorphisme f dans $\text{Diff}_0^r(M)$ distinct de l'identité. Pour conclure la preuve du théorème précédent, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que tout difféomorphisme de la forme $[u, v] = u \circ v \circ u^{-1} \circ v^{-1}$, où u et v sont des difféomorphismes supportés tous deux dans une même boule U de \mathcal{U} , appartient au groupe normal engendré par f . La preuve de ce dernier fait repose sur une astuce que nous allons décrire. Comme le difféomorphisme f est distinct de l'identité, on peut trouver une boule ouverte B telle que la boule $f(B)$ est disjointe de la boule B . Par un argument de topologie différentielle, on peut trouver un difféomorphisme g qui envoie la boule B sur la boule U . Dans ce cas, l'image de la boule U par le difféomorphisme $f^g = gfg^{-1}$, qui n'est autre que la boule $g(f(B))$, est disjointe de la boule $U = g(B)$. On considère de plus un difféomorphisme h qui envoie la boule U sur une boule disjointe des boules U et $f^g(U)$. Dans ce cas, le difféomorphisme $[u, f^g] = u \circ (f^g \circ u^{-1} \circ (f^g)^{-1})$ coïncide avec le difféomorphisme u sur la boule U , coïncide avec le difféomorphisme $f^g \circ u^{-1} \circ (f^g)^{-1}$ sur la boule $f^g(U)$ et vaut l'identité ailleurs. De même, le difféomorphisme $[v, h]$ coïncide avec le difféomorphisme v sur la boule U , coïncide avec le difféomorphisme $h \circ v^{-1} \circ h^{-1}$ sur la boule $h(U)$ et vaut l'identité ailleurs. Par conséquent, le difféomorphisme $[[u, f^g], [v, h]] = [u, f^g][v, h][u, f^g]^{-1}[v, h]^{-1}$ coïncide avec :

- l'identité hors des boules U , $h(U)$ et $f^g(U)$;
- le difféomorphisme $f^g \circ u^{-1} \circ (f^g)^{-1} \circ f^g \circ u \circ (f^g)^{-1} = Id$ sur la boule $f^g(U)$;
- le difféomorphisme $h \circ v^{-1} \circ h^{-1} \circ h \circ v \circ h^{-1} = Id$ sur la boule $h(U)$;
- le difféomorphisme $u \circ v \circ u^{-1} \circ v^{-1} = [u, v]$ sur la boule U .

Au final, on a l'égalité $[u, v] = [[u, f^g], [v, h]]$. Ceci implique que le commutateur $[u, v]$ appartient au groupe normal engendré par f et termine la preuve du théorème.

Dans le cas des variétés non-compactes, la composante connexe de l'identité du groupe $\text{Diff}^r(M)$ admet un sous-groupe distingué que l'on notera $\text{Diff}_0^r(M)$: la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes à support compact de M (noter que ce groupe est aussi la composante connexe de l'identité du groupe $\text{Diff}^r(M)$ muni de la topologie C^r de Whitney). Si la variété M n'a pas de bord, la démonstration du théorème précédent s'applique telle quelle dans ce cas et on obtient la simplicité du groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ pour $r \neq \dim(M) + 1$. Si la variété M admet un bord, le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ admet un sous-groupe distingué : la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes supportés dans l'intérieur $M - \partial M$ de la variété M . Ce dernier groupe est simple si $r \neq \dim(M) + 1$.

2. Le support d'un homéomorphisme h est l'adhérence de l'ensemble des points qui ne sont pas fixés par h .

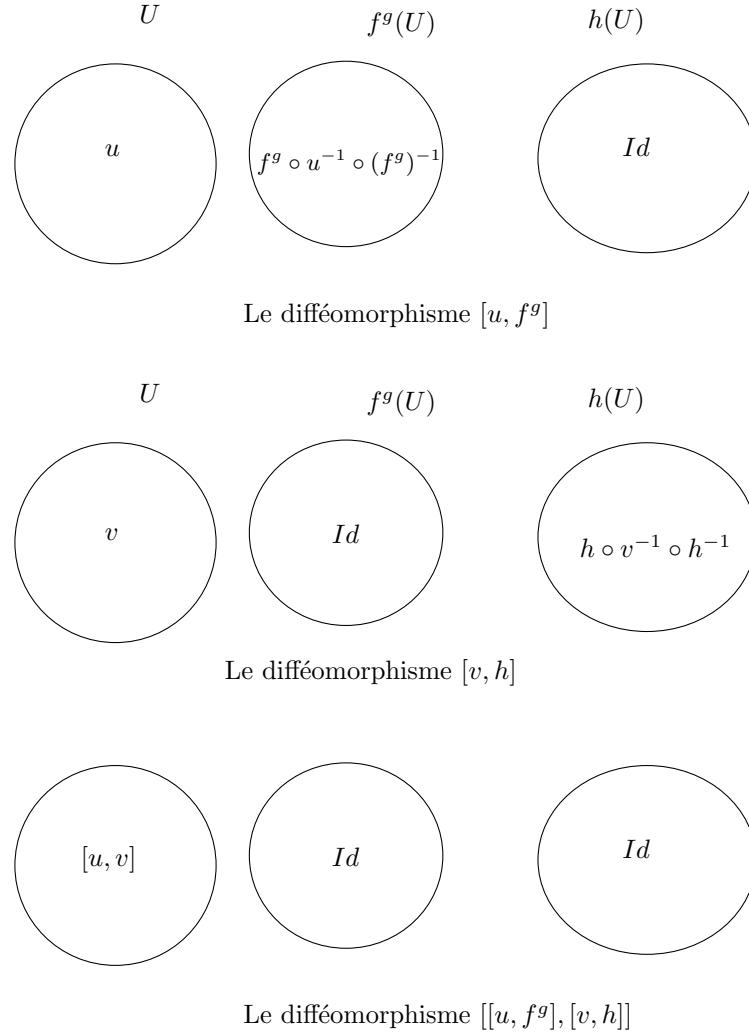


FIGURE 1.1 – Preuve du théorème de Fischer-Mather-Thurston

Il est à noter que l'on a des résultats de simplicité analogues dans le cas des groupes de difféomorphismes qui préservent une forme volume ou une forme symplectique (voir [6], [9], [19]) mais que, par exemple, on ne sait pas si la composante connexe de l'identité du groupe des homéomorphismes du disque unité qui valent l'identité près du bord et qui préservent l'aire est simple (voir [35] sur le sujet).

1.1 Longueur des commutateurs et norme de fragmentation

Fixons désormais $r \neq \dim(M) + 1$. On a vu au cours de la preuve du théorème précédent que tout difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(M)$ pouvait s'écrire comme produit (pour la composition !) de difféomorphismes supportés dans des boules ou comme produit de commutateurs (c'est-à-dire de difféomorphismes de la forme $[f, g]$, où f et g sont deux difféomorphismes dans le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$). Pour un difféomorphisme f , on peut alors définir la *longueur des commutateurs* de f notée $cl(f)$ comme le nombre minimal de

facteurs nécessaires pour écrire f en tant que produit de commutateurs et la *norme de fragmentation* de f , notée $\text{Frag}(f)$ comme le nombre minimal de facteurs nécessaires pour écrire f en tant que produit de difféomorphismes supportés dans des boules. Pour essayer de mieux comprendre le groupe que l'on étudie, on peut essayer de décrire au mieux ces deux quantités. Pour ce faire, une des premières questions à aborder est de savoir si ces applications sont bornées ou pas. Dans [11], Burago, Ivanov et Polterovich montrent que ces quantités sont bornées dans le cas des sphères et des variétés compactes de dimension 3. Ils introduisent aussi la notion plus générale de *norme invariante par conjugaison* sur un groupe G : c'est une application ν du groupe G dans \mathbb{R}_+ invariante par conjugaison qui s'annule uniquement en l'élément neutre du groupe G et qui vérifie une inégalité triangulaire, à savoir que $\nu(gh) \leq \nu(g) + \nu(h)$ pour deux éléments quelconques g et h du groupe G . On peut voir facilement que la norme de fragmentation et la longueur des commutateurs sont deux exemples de normes invariantes par conjugaison. Les théorèmes que l'on vient d'évoquer s'étendent à toute norme invariante par conjugaison : toute norme invariante par conjugaison sur le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ est bornée dans le cas où la variété M est de dimension 3 ou est une sphère. La stratégie de la preuve est la suivante. Burago, Ivanov et Polterovich introduisent une classe de variétés ouvertes qu'ils appellent variétés portables qui contient notamment \mathbb{R}^d ou encore l'anneau ouvert de dimension 2. Pour de telles variétés M , la longueur des commutateurs est majorée par 2 et il existe un élément f du groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ tel que tout élément du groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ s'écrit comme produit d'au plus 14 conjugués de f : cela permet en particulier de montrer que toute norme invariante par conjugaison est bornée sur le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ dans ces cas-là. Dans le cas d'une variété quelconque, il suffit alors de montrer que tout difféomorphisme se décompose en un produit d'un nombre uniformément borné de difféomorphismes supportés dans des variétés portables. En particulier, dans le groupe $\text{Diff}_0^r(\mathbb{S}^d)$ des difféomorphismes de la sphère, tout élément se décompose en produit de deux difféomorphismes qui fixent un voisinage d'un point, donc supportés chacun dans une variété portable. Ceci implique le théorème de Burago, Ivanov et Polterovich dans le cas des sphères et que la longueur des commutateurs est majorée par 4 dans ce cas. En utilisant la même méthode, le résultat de Burago, Ivanov et Polterovich sur les variétés de dimension 3 a été généralisé par Tsuboi dans [50] et [51] dans le cas des variétés compactes sans bord de dimension supérieure ou égale à 5 et dans le cas des variétés de dimension 4 sans anse d'indice moitié. Il a aussi montré récemment que tout homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^d)$ s'écrit comme un commutateur (voir [52]). Au vu des théorèmes précédents, on peut faire la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Pour une variété compacte sans bord M , tout difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(M)$ s'écrit comme un commutateur.*

Dans le cas du groupe $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$ des difféomorphismes C^∞ du cercle qui préservent l'orientation, le meilleur majorant connu de la longueur des commutateurs est 2. Expliquons comment celui-ci est obtenu. Considérons un difféomorphisme f dans le groupe précédent. Composons f avec une rotation du cercle R_λ de sorte que la composée $R_\lambda \circ f$ ait un nombre de rotation diophantien. Un théorème d'Herman (voir [33]) implique que le difféomorphisme $R_\lambda \circ f$ est C^∞ -conjugué à une rotation R_α : $R_\lambda \circ f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, où h désigne un C^∞ -difféomorphisme du cercle qui préserve l'orientation. On écrit alors : $f = R_{\lambda+\alpha} \circ R_\alpha^{-1} \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Comme une rotation du cercle s'écrit comme un commutateur d'éléments de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ (donc de difféomorphismes du cercle qui préservent

l'orientation), la décomposition précédente permet d'obtenir d'obtenir une décomposition du difféomorphisme f en tant que produit de deux commutateurs.

Il est à noter que ce type de question sur la longueur des commutateurs est en général très difficile. En particulier, ce n'est que très récemment que l'on a prouvé la conjecture de Ore qui date de 1951 : dans tout groupe fini simple, tout élément s'écrit comme un commutateur (voir [36] pour la démonstration de cette conjecture).

Avant d'aborder la conjecture 1, il est raisonnable d'essayer d'abord de montrer que la norme de fragmentation, donc la longueur des commutateurs et toute norme invariante par conjugaison sur ce groupe, est bornée pour les surfaces compactes sans bord distinctes de la sphère : dans ces cas-là, comme la dimension est trop petite, les arguments de transversalité utilisés par Tsuboi et Burago, Ivanov et Polterovich ne semblent plus marcher. Il s'agit d'essayer de montrer directement que la norme de fragmentation est bornée sur les groupes de difféomorphismes de ces surfaces. Le cas le plus simple à aborder semble être celui du groupe $\text{Diff}_0^r(\mathring{\mathbb{A}})$ des difféomorphismes à support compact dans l'anneau ouvert $\mathring{\mathbb{A}}$ qui sont compactement isotopes à l'identité. D'après Burago, Ivanov et Polterovich, pour $r \neq 3$, on sait déjà que la norme de fragmentation est bornée sur ce groupe puisque la surface $\mathring{\mathbb{A}}$ est portable mais on cherche à avoir une démonstration directe de ce fait. C'est ce que l'on a obtenu dans le chapitre 2 de cette thèse :

Théorème 1. *Pour r dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la norme de fragmentation sur $\text{Diff}_0^r(\mathring{\mathbb{A}})$ est majorée par 4.*

Il est à noter que ce théorème montre que la norme de fragmentation est bornée sur le groupe $\text{Diff}_0^3(\mathring{\mathbb{A}})$, ce qui n'était pas connu. De plus, la borne obtenue est bien meilleure que celle que donne les résultats de Burago, Ivanov et Polterovich qui vaut 28. Malheureusement, la méthode de démonstration du théorème précédent est très spécifique à l'anneau. On a regroupé dans un troisième chapitre les résultats partiels obtenus dans le cas des difféomorphismes du tore. On a en particulier le résultat suivant qui fait intervenir l'ensemble de rotation d'un homéomorphisme du tore que l'on ne définira pas ici (voir [8] pour une introduction aux ensembles de rotation des homéomorphismes du tore) :

Théorème 2. *Soit f un difféomorphisme de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$. Si l'ensemble de rotation d'un relevé de f est inclus dans $[0, M] \times \mathbb{R}$, alors :*

$$\text{Frag}(f) \leq 4 \left(\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$

Ainsi, pour prouver que la norme de fragmentation est bornée, il suffit d'écrire tout difféomorphisme en tant que produit d'un nombre uniformément borné de difféomorphismes qui ont un ensemble de rotation pas trop gros (par exemple inclus dans $[0, 1] \times \mathbb{R}$). Pour cela, on pourrait essayer de mieux comprendre comment peut se comporter l'ensemble de rotation vis-à-vis de la composition. Cela étant, la question de savoir si la norme de fragmentation (et donc la longueur des commutateurs) est bornée sur le groupe des homéomorphismes isotopes à l'identité d'une surface compacte sans bord de genre supérieure ou égale à 1 reste ouverte.

Nous n'avons pour l'instant abordé que des techniques pour montrer que la norme de fragmentation et la longueur des commutateurs sont bornées. Comment essayer de prouver le cas échéant qu'une telle quantité n'est pas bornée ? La manière quasi-systématique pour montrer ceci est d'utiliser des quasi-morphismes homogènes. Un *quasi-morphisme* sur un groupe G est une application q du groupe G dans \mathbb{R} qui est presque un morphisme dans le sens où les quantités $|q(gh) - q(g) - q(h)|$ sont bornées par une quantité C indépendante des éléments g et h du groupe G . La plus petite constante C qui vérifie cette propriété est appelée le *défaut* du quasi-morphisme q et est notée $D(q)$. Un tel quasi-morphisme q sera dit *homogène* si de plus q est un morphisme sur les sous-groupes de G engendrés par un élément, autrement dit si pour un entier relatif n et un élément g du groupe G , on a $q(g^n) = nq(g)$. Un quasi-morphisme homogène est invariant par conjugaison. En effet, étant donnés deux éléments g et h du groupe G , la quantité $q(hg^n h^{-1}) = nq(hgh^{-1})$ reste à distance uniformément bornée par rapport à n de $q(g^n) = nq(g)$ et, en faisant tendre l'entier n vers l'infini, on obtient que $q(hgh^{-1}) = q(g)$. Ceci implique que la valeur d'un quasi-morphisme sur un commutateur ne peut pas être très grande : des relations $|q([g, h]) - q(g) - q(hg^{-1}h^{-1})| \leq D(q)$ et $q(hg^{-1}h^{-1}) = q(g^{-1}) = -q(g)$, on déduit que, pour des éléments g et h de G , on a $|q([g, h])| \leq D(q)$. En utilisant une nouvelle fois la relation de quasi-morphisme, on obtient que, pour un élément g distinct de l'élément neutre du groupe G qui s'écrit comme produit de commutateurs, la quantité $q(g)$ est majorée par $(2cl(g) - 1)D(q)$, où $cl(g)$ désigne la longueur des commutateurs de l'élément g . Supposons que le quasi-morphisme homogène q soit non-trivial, c'est-à-dire distinct de l'application nulle, et que le groupe G soit parfait, c'est-à-dire que tout élément de ce groupe peut s'écrire comme produit de commutateurs. On peut alors trouver un élément g du groupe G tel que $q(g) \neq 0$ et, comme $q(g^n) = nq(g) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient que la longueur des commutateurs de g^n tend vers $+\infty$. En particulier, la longueur des commutateurs n'est pas bornée sur le groupe G . De fait, nous allons voir que les quasi-morphismes et la longueur des commutateurs sont encore plus intimement reliés. Remarquons que, pour un groupe parfait G et un élément g du groupe G , la suite $(cl(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive donc la suite $(cl(g^n)/n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la *longueur stable des commutateurs* de g qui est notée $scl(g)$ ³. Le théorème de dualité de Bavard s'énonce alors ainsi (voir [12] ou [4] pour une preuve) :

Théorème (Dualité de Bavard). *Soit G un groupe parfait. On note $Q(G)$ l'ensemble des quasi-morphismes homogènes non-nuls sur G . Pour tout élément g du groupe G , on a la relation suivante :*

$$scl(g) = \sup_{q \in Q(G)} \frac{|q(g)|}{2D(q)}.$$

Remarquons que l'on a montré l'une des inégalités dans l'égalité ci-dessus. L'inégalité réciproque est plus ardue à obtenir et fait intervenir la cohomologie bornée des groupes. L'utilisation d'un quasi-morphisme montre non seulement que la longueur des commutateurs n'est pas bornée mais de plus que la longueur stable des commutateurs n'est pas identiquement nulle. Comme remarqué dans l'article [11], il existe des groupes pathologiques pour lesquels la longueur des commutateurs n'est pas bornée mais la longueur stable des commutateurs est nulle (Burago, Ivanov et Polterovich précisent que cette remarque est due à A. Muranov) mais de tels exemples semblent fabriqués spécifiquement pour vérifier une telle propriété. Notons que l'on connaît un certain nombre de

3. scl pour « stable commutator length ».

groupes de type fini qui admettent des quasi-morphismes non-triviaux. C'est le cas en particulier des groupes libres, plus généralement des groupes hyperboliques, des mapping class groups,... On pourra consulter le livre *scl* [12] de Danny Calegari pour plus d'informations sur ce sujet et sur les quasi-morphismes en général.

Revenons au cas des groupes de difféomorphismes et d'homéomorphismes. Le premier groupe d'homéomorphismes sur lequel on a remarqué qu'il existait un quasi-morphisme est le groupe $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ des relevés d'homéomorphismes du cercle. C'est aussi le groupe des homéomorphismes de \mathbb{R} qui commutent à la translation $x \mapsto x + 1$. Sur ce groupe, il se trouve que le *nombre de translation*, tel que défini par Poincaré, est un quasi-morphisme. Rappelons la définition du nombre de translation. Pour un homéomorphisme F dans $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et un point x de \mathbb{R} , la suite $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ est sous-additive, donc la suite des « vitesses moyennes de l'orbite de x sous F à l'instant n » $(F^n(x) - x / n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\rho(F)$ indépendant du point x choisi. Cette quantité décrit la vitesse asymptotique de toutes les orbites de l'homéomorphisme F . L'application ρ est alors un quasi-morphisme homogène sur le groupe $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$. En particulier, la longueur des commutateurs n'est pas bornée sur ce groupe. De plus, il s'agit essentiellement de l'unique quasi-morphisme homogène sur ce groupe, au sens où l'espace vectoriel des quasi-morphismes homogènes sur ce groupe est de dimension 1, engendré par le nombre de translation (voir [7], [27]). On déduit du théorème de dualité de Bavard que, pour un homéomorphisme F dans $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, on a $scl(F) = |\rho(F)|/2$. Dans le cas précis de ce groupe, on comprend complètement la longueur des commutateurs en utilisant un théorème de Eisenbud, Hirsch et Neumann (voir le théorème 4.5 ci-dessous, issu de [14]).

Une autre classe de groupes de difféomorphismes sur lesquels sont définis des quasi-morphismes sont les groupes de difféomorphismes qui préservent une forme symplectique : la facilité de construire des quasi-morphismes sur ces groupes tient à l'existence d'une forme symplectique qui permet d'intégrer certaines quantités pour définir des quasi-morphismes. Le premier article traitant de quasi-morphismes sur ces groupes est l'article [26] de Gambaudo et Ghys dans lequel ils décrivent des manières variées de construire des quasi-morphismes sur le groupe $\text{Diff}_0^r(S, \text{aire})$ des difféomorphismes d'une surface compacte sans bord S isotopes à l'identité qui préservent une forme d'aire, pour $r \neq 0$. Ils montrent en particulier que, pour toute surface S munie d'une forme d'aire, notée *aire*, l'espace vectoriel des quasi-morphismes homogènes sur le groupe $\text{Diff}_0^r(S, \text{aire})$ est de dimension infinie pour $r \neq 0$. En utilisant de l'homologie de Floer, Entov et Polterovich ont aussi construit dans [16] un quasi-morphisme sur le groupe $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^2, \text{aire})$ qui possède une propriété remarquable (la restriction au sous-groupe constitué des difféomorphismes hamiltoniens supportés dans un disque d'aire suffisamment petite est égal au morphisme de Calabi que nous ne définirons pas ici) vérifiée aussi par des quasi-morphismes construits par Py de manière plus élémentaire dans [47] pour des surfaces de genre supérieur ou égal à deux. Entov, Polterovich et Py ont ensuite constaté que certains des quasi-morphismes construits étaient continus et étendent ces résultats au cas des homéomorphismes préservant l'aire. En particulier, sur tous ces groupes, la longueur des commutateurs n'est pas bornée.

Dans le chapitre 3 de cette thèse (qui reprend l'article [42] écrit en anglais et est par conséquent rédigé dans cette langue), nous allons voir un exemple de quasi-morphisme défini sur un groupe de difféomorphismes de surface sans préservation d'aire, le groupe

$\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ des difféomorphismes de l'anneau fermé isotopes à l'identité. Donnons tout de suite la construction de ce quasi-morphisme. On identifie le revêtement universel de l'anneau fermé \mathbb{A} à la bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Pour un difféomorphisme f dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$, on note $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ un relevé de l'homéomorphisme f . On remarque que la restriction F_0 de l'homéomorphisme F à $\mathbb{R} \times \{0\}$ et la restriction F_1 de l'homéomorphisme F à $\mathbb{R} \times \{1\}$ définissent chacun un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$. La différence des nombres de translations de ces deux homéomorphismes est indépendant du relevé F de l'homéomorphisme f choisi et permet de définir un quasi-morphisme q sur le groupe $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$. Une estimation de la longueur des commutateurs sur le groupe $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ permet alors de montrer le résultat suivant :

Théorème 3. *L'espace des quasi-morphismes homogènes sur $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ est de dimension 1, engendré par le quasi-morphisme q .*

On est dans le même cas que le groupe des relevés d'homéomorphismes du cercle. Dans la démonstration de ce théorème, on utilise d'ailleurs le résultat de Eisenbud, Hirsch et Neumann qui évalue la longueur des commutateurs sur le groupe des relevés d'homéomorphismes du cercle. On donne aussi des estimations de la norme de fragmentation dans ce chapitre et on généralise la construction de ces quasi-morphismes au cas de toutes les surfaces compactes à bord (distinctes du disque). Ces constructions semblent essentiellement dues au fait que ces groupes admettent un sous-groupe normal d'indice infini (la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes de la surface à support dans l'intérieur de la surface).

1.2 Éléments de distorsion

Une autre manière de mieux comprendre notre groupe $\text{Diff}_0^r(M)$, où M est une variété compacte, est de se demander quels sont les sous-groupes de ce groupe. Autrement dit, si l'on fixe un groupe G , existe-t-il un morphisme de groupes injectif du groupe G dans le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$? Si, pour notre groupe G , on sait répondre par l'affirmative à cette première question, on peut alors chercher à décrire du mieux possible les morphismes de groupes du groupe G vers le groupe $\text{Diff}_0^r(M)$ (idéalement à conjugaison près mais ceci est souvent un but inaccessible). La notion d'élément de distorsion, que l'on va définir, permet d'obtenir des résultats de rigidité sur les morphismes de groupes de G vers $\text{Diff}_0^r(M)$ et va permettre de donner des éléments de réponse (très partiels) à ces questions. Une question plus précise à laquelle on peut s'intéresser est la question suivante qui est une version de la conjecture de Zimmer.

Conjecture 2. *Si la dimension de la variété M est inférieure ou égale à $n - 2$, le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ des matrices $n \times n$ à coefficients entiers de déterminant 1 ne s'injecte pas par morphisme dans le groupe des homéomorphismes de M .*

Le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ agit projectivement sur la sphère de dimension $n - 1$ mais cette conjecture signifie que ce groupe est en quelque sorte trop gros pour agir sur des espaces de dimension plus petite. Notons que, sous cette forme, la conjecture n'a été résolue que dans le cas où la variété M est une sphère de dimension distincte de 2 : tout d'abord dans

le cas du cercle par Witte dans [54] puis récemment dans le cas des sphères de dimension supérieure ou égale à 3 par Bridson et Vogtmann dans [10]. Nous allons voir comment la notion d'éléments de distorsion ont permis à Polterovich d'une part et Franks et Handel d'autre part de faire des progrès sur cette conjecture.

Nous allons maintenant définir ce qu'est un élément de distorsion dans un groupe. Rappelons qu'un groupe G est dit de *type fini* s'il admet une partie génératrice S finie : tout élément g du groupe s'écrit sous la forme $g = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}$ où les s_i sont des éléments de la partie génératrice S et les ϵ_i valent $+1$ ou -1 . L'entier n minimal dans une décomposition de la forme précédente est notée $l_S(g)$. La fonction l_S est invariante par passage à l'inverse et vérifie une inégalité triangulaire $l_S(gh) \leq l_S(g) + l_S(h)$. En particulier, pour tout élément g du groupe G , la suite $(l_S(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, donc la suite $(\frac{l_S(g^n)}{n})_n$ converge. Lorsque la limite de cette suite est nulle, on dit que l'élément g est *distordu* ou *de distorsion* dans le groupe G . Notons que cette notion ne dépend pas de la partie génératrice choisie : si S' désigne une autre partie génératrice du groupe G alors il existe des constantes strictement positives C et C' telles que $l_S \leq Cl_{S'}$ et $l_{S'} \leq C'l_S$. Il s'agit donc d'une notion intrinsèque au groupe G . Si notre groupe G n'est pas de type fini, on dira qu'un élément g du groupe G est de distorsion s'il appartient à un sous-groupe de type fini de G dans lequel il est distordu. Cette définition prolonge bien la précédente. Le principal intérêt de la notion d'élément de distorsion réside dans la propriété suivante, qui est une propriété de rigidité des morphismes de groupes : si l'on a un morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow H$ et si un élément g du groupe G est de distorsion, alors son image par φ est aussi de distorsion. Dans le cas où le groupe H ne contient pas d'élément de distorsion autre que l'élément neutre du groupe H et où le groupe G contient un élément de distorsion autre que l'élément neutre, un tel morphisme de groupe ne peut pas être injectif : le groupe G n'est pas un sous-groupe de H .

Donnons maintenant quelques exemples simples d'éléments de distorsion. Dans tout groupe G , les éléments de torsion, c'est-à-dire ceux dont une certaine puissance strictement positive est égale à l'élément neutre du groupe, sont des éléments de distorsion. Dans les groupes libres et les groupes abéliens libres, il n'est pas difficile de voir que le seul élément de distorsion est l'élément neutre. Les exemples les plus simples de groupes qui admettent un élément de distorsion qui n'est pas de torsion sont les groupes de Baumslag-Solitar qui admettent la présentation suivante : $BS(1, p) = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^p \rangle$. On a alors, pour tout entier n : $b^n a b^{-n} = a^{p^n}$. Si l'on prend $S = \{a, b\}$ comme partie génératrice de ce groupe, alors $l_S(a^{p^n}) \leq 2n + 1$ et l'élément a est de distorsion dans le groupe $BS(1, p)$ si $|p| \geq 2$. Un groupe G est dit *nilpotent* si la suite de sous-groupes $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G définie par $G_0 = G$ et $G_{n+1} = [G_n, G]$ (cette notation désigne le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[g_n, g] = g_n g g_n^{-1} g^{-1}$, où $g_n \in G_n$ et $g \in G$) se stabilise et vaut $\{1_G\}$ à partir d'un certain rang. Un exemple typique de groupe nilpotent est le groupe de Heisenberg formée des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients sont entiers. Dans un groupe N nilpotent non-abélien, on peut toujours trouver trois éléments distincts a , b et c distincts de l'identité tels que $[a, b] = c$ et l'élément c commute avec a et b . Dans ce cas, on a $c^{n^2} = [a^n, b^n]$ donc, dans le groupe engendré par a et b (et donc aussi dans N), l'élément c est de distorsion : $l_{\{a, b\}}(c^{n^2}) \leq 4n$. Un théorème général de Lubotzky, Mozes et Raghunathan donne l'existence d'éléments de distorsion (et même d'éléments dont la longueur de mot croît logarithmiquement) dans certains réseaux de groupes de Lie de rang supérieur ou égal à 2, en particulier dans le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ pour

$n \geq 3$. Dans le cas du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, on peut même trouver une partie génératrice formée d'éléments de distorsion. Notons en passant que, dans les groupes modulaires (voir [18]) et dans le groupe des échanges d'intervalles (voir [46]), tout élément distordu est de torsion. Dans ce dernier cas, on montre que si le cardinal de l'ensemble des points de coupures ne croît pas exponentiellement (dans le cas contraire on ne peut pas avoir un élément de distorsion), alors l'échange d'intervalles est constitué de rotations à support disjoint : on conclut en montrant que, dans ce cas, seules les rotations rationnelles peuvent être distordues. Plus généralement, quand on veut montrer qu'un élément n'est pas de distorsion, il s'agit de trouver des quantités qui se comportent bien vis-à-vis de la composition et qui croissent rapidement lorsque l'on itère notre élément.

Passons au cas des groupes de difféomorphismes. Le théorème qui va suivre a permis d'avancer sur la conjecture de Zimmer. On note S une surface compacte sans bord qui est munie d'une mesure de probabilité de support total notée *aire*. Enfin, désignons par $\mathrm{Diff}^1(S, \text{aire})$ le groupe des difféomorphismes C^1 de la surface S qui préservent la mesure *aire*. On a alors le théorème suivant :

Théorème. (*Polterovich [48], Franks-Handel [24]*) *Si la surface S est de genre supérieur ou égal à deux, tout élément de distorsion du groupe $\mathrm{Diff}^1(S, \text{aire})$ est de torsion.*

Comme les groupes nilpotents et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ possèdent des éléments de distorsion qui ne sont pas de torsion, on en déduit qu'ils ne sont pas sous-groupes du groupe $\mathrm{Diff}^1(S, \text{aire})$. Dans ce deuxième cas, en utilisant une propriété de « presque »-simplicité du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, on en déduit même qu'un morphisme de groupes du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ vers $\mathrm{Diff}^1(S, \text{aire})$ est « presque » trivial (son image est un groupe fini). Franks et Handel ont aussi obtenu un résultat sur les éléments de distorsion dans le cas où la mesure *aire* est une mesure de probabilité borélienne quelconque qui leur permet d'en déduire que l'affirmation précédente reste vraie pour une mesure *aire* quelconque de support infini. La question naturelle que l'on peut se poser maintenant est de savoir si l'on peut généraliser ces théorèmes dans le cas des groupes de difféomorphismes et d'homéomorphismes généraux.

Malheureusement, ce n'est pas le cas : on peut trouver beaucoup d'éléments de distorsion dans ces cas-là. L'illustration la plus frappante de ce phénomène est le théorème suivant de Calegari et Freedman :

Théorème. (*Calegari-Freedman [13]*) *Pour un entier $d \geq 1$, tout homéomorphisme du groupe $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{S}^d)$ est de distorsion.*

Dans le cas d'une régularité plus grande, Avila a montré dans [3] que tout difféomorphisme de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$ dont des itérés arbitrairement grands sont arbitrairement proches de l'identité au sens C^∞ (on dira qu'un tel élément est *récurrent*) est de distorsion dans le groupe $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$: en particulier, les rotations irrationnelles sont distordues dans ce groupe. En reprenant les techniques d'Avila et en utilisant un résultat de perfection locale (dû à Haller, Rybicki et Teichmann [30], voir l'appendice 1), j'ai obtenu le résultat suivant qui est l'objet du cinquième chapitre de cette thèse et reprend en grande partie l'article [44] :

Théorème 4. *Pour toute variété compacte sans bord M , tout élément récurrent dans $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ est de distorsion dans ce même groupe.*

En particulier, les rotations irrationnelles de la sphère de dimension 2 et les rotations irrationnelles sur le tore de dimension quelconque sont des éléments de distorsion. Plus généralement, on obtient un certain nombre d'éléments de distorsion sur toutes les variétés qui admettent une action du cercle. Noter que grâce à la méthode d'Anosov-Katok (voir [32] et [20]), on peut obtenir des éléments récurrents dans le cas de la sphère ou du tore de dimension 2 qui ne sont pas conjugués à une rotation. De toutes façons, on ne pouvait pas espérer un résultat analogue au théorème de Polterovich et Franks et Handel puisque nous allons voir que le groupe de Baumslag-Solitar $BS(1, 2)$ s'injecte dans le groupe $\text{Diff}_0^\infty(M)$ pour toute variété M (ce fait m'a été indiqué par Isabelle Liousse).

Identifions le cercle \mathbb{S}^1 avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On considère alors les deux difféomorphismes (analytiques) du cercle $a : x \mapsto x + 1$ et $b : x \mapsto 2x$. On voit que la relation $bab^{-1} = a^2$ est vérifiée donc que ces deux éléments définissent une action du groupe $BS(1, 2)$ sur le cercle. En épaississant l'infini (*i.e.* en remplaçant le point à l'infini par un intervalle), on obtient une action à support compact de notre groupe sur \mathbb{R} . On peut rendre cette dernière action C^∞ . Enfin, par action radiale, on obtient une action C^∞ à support compact de ce groupe de Baumslag-Solitar sur \mathbb{R}^d et, en identifiant un disque ouvert d'une variété à \mathbb{R}^d , on obtient une action sur toute variété. Cela donne lieu à des éléments de distorsion (non-récurrents) dans le groupe $\text{Diff}_0^\infty(M)$ pour toute variété M . Dans le cas des difféomorphismes, il est difficile d'approcher une caractérisation des éléments de distorsion du fait de la multiplicité des obstructions à être un élément de distorsion (par exemple, la différentielle ne peut pas croître très vite le long d'une orbite, l'entropie topologique du difféomorphisme doit être nulle). En revanche, dans les groupes d'homéomorphismes de surface, il n'y a qu'une obstruction connue à être un élément de distorsion. Nous allons la décrire. Les résultats qui suivent sont l'objet du sixième chapitre qui est une version française de l'article [43].

Notons S une surface compacte orientable distincte de la sphère et \tilde{S} son revêtement universel. On munit la surface S et donc la surface \tilde{S} aussi d'une métrique à courbure constante 0 ou -1 suivant les cas, de sorte que la surface \tilde{S} munie de cette métrique s'identifie à une partie du disque de Poincaré ou du plan euclidien. On appellera *domaine fondamental* de \tilde{S} tout compact connexe D qui se surjecte via le revêtement $\tilde{S} \rightarrow S$ sur S et qui vérifie la propriété suivante : pour tout automorphisme de revêtement γ , l'intérieur de D et l'intérieur de $\gamma(D)$ sont disjoints. L'obstruction est alors la suivante : si f est un élément de distorsion dans $\text{Homeo}_0(S)$, alors, notant $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ un relevé de f , la suite $(\frac{\text{diam}(\tilde{f}^n(D))}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, où $\text{diam}(\tilde{f}^n(D))$ désigne le diamètre de $\tilde{f}^n(D)$. Dans le cas du tore, cette dernière condition signifie que l'ensemble de rotation de l'homéomorphisme f est réduit à un point. On peut alors se demander si la réciproque à la propriété précédente est vraie. Je ne suis pas parvenu à montrer la réciproque mais j'ai réussi à montrer que, si le diamètre de $\tilde{f}^n(D)$ croissait suffisamment lentement, alors on a un élément de distorsion :

Théorème 5. *Si la suite $(\frac{\text{diam}(\tilde{f}^n(D)) \log(\text{diam}(\tilde{f}^n(D)))}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0, alors l'homéomorphisme f est un élément de distorsion du groupe $\text{Homeo}_0(S)$.*

Au vu de ce théorème, on peut se demander si la condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{diam}(\tilde{f}^n(D))}{n} = 0$ n'était pas trop faible. Il n'en est rien d'après le théorème suivant :

Théorème 6. *Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui vérifie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{n} = 0$. Alors il existe un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$ qui est un élément de distorsion dans ce groupe et qui vérifie :*

$$\text{diam}(\tilde{f}^n(D)) \geq w_n.$$

Autrement dit, pour des éléments de distorsion, le diamètre d'un domaine fondamental peut croître arbitrairement vite sous-linéairement. La conjecture naturelle demeure :

Conjecture 3. *Si la suite $(\frac{\text{diam}(\tilde{f}^n(D))}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0, alors l'homéomorphisme f est un élément de distorsion du groupe $\text{Homeo}_0(S)$.*

Donnons une idée de la preuve du théorème 5 : celle-ci fait intervenir de manière cruciale la fragmentation. Fixons un recouvrement fini \mathcal{U} par des intérieurs de bonnes boules fermés d'une variété compacte M . Comme nous l'avons vu précédemment, tout homéomorphisme isotope à l'identité de M peut s'écrire comme composé d'homéomorphismes supportés chacun dans l'un des ouverts de \mathcal{U} . Pour un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$, on note $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f)$ le nombre minimal de facteurs nécessaires pour écrire f en tant que produit d'homéomorphismes supportés chacun dans l'un des ouverts du recouvrement \mathcal{U} . La proposition suivante donne une relation entre cette longueur de fragmentation et le fait d'être un élément de distorsion :

Proposition 7. *Pour un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(M)$, si la suite $(\frac{\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n) \log(\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n))}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0, alors l'homéomorphisme f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(M)$.*

La démonstration de cette proposition fait intervenir un argument qu'utilise Avila dans [3], adapté au cas des homéomorphismes. En utilisant cet argument tel quel, on obtient uniquement la proposition précédente sous l'hypothèse que la suite $(\frac{\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n)^2}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0. On obtient la proposition précédente en modifiant l'argument d'Avila. Cette proposition a l'avantage d'être valable sur toute variété compacte mais l'inconvénient de faire intervenir la quantité $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ qui est difficile à comprendre. Elle semble suggérer que les quantités du type $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ sont les quantités à considérer pour pouvoir faire de la théorie géométrique des groupes sur les groupes d'homéomorphismes. Notons que, sur les sphères, en utilisant l'« annulus theorem » (voir [34] et [49]), on peut montrer que ces quantités sont uniformément bornées. Par conséquent, cette proposition implique le théorème de Calegari et Freedman [13] évoqué plus haut. On peut aussi essayer de généraliser le théorème de Calegari et Freedman en montrant cette conjecture :

Conjecture 4. *Pour une variété compacte simplement connexe M , l'application $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ est bornée. Par conséquent, tout élément du groupe $\text{Homeo}_0(M)$ est de distorsion.*

Dans le cas des surfaces, la proposition suivante permet de relier la fragmentation à la croissance du diamètre d'un domaine fondamental :

Proposition 8. *Soit S une surface orientable compacte sans bord distincte de la sphère. Il existe des constantes $C > 1$ et $C' > 0$ telles que, pour tout homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$, on a :*

$$\frac{1}{C} \text{diam}(\tilde{f}(D)) - C' \leq \text{Frag}_{\mathcal{U}}(f) \leq C \cdot \text{diam}(\tilde{f}(D)) + C'.$$

Notons que cette proposition jointe à la précédente implique le théorème 5. L'inégalité de gauche dans la proposition précédente ne pose pas de difficultés. Par contre, la démonstration de l'inégalité de droite fait intervenir le groupe fondamental de la surface considérée. En particulier, la preuve fait appel à l'algorithme de Dehn pour les groupes à petite simplification dans le cas des surfaces de genre supérieur ou égal à deux. Au final, le théorème est vrai pour toutes les surfaces : on peut donc se demander si l'on peut trouver une preuve directe de cette inégalité qui ne fait pas intervenir le groupe fondamental de la surface considérée. Une telle preuve pourrait se généraliser au cas de variétés de dimension supérieure.

Conjecture 5. *Le théorème 5 reste vrai pour les tores de dimension quelconque et les variétés hyperboliques de dimension quelconque.*

1.3 Morphismes entre groupes d'homéomorphismes

Une autre manière de comprendre un groupe G est de comprendre son groupe d'automorphismes. Le théorème suivant de Whittaker décrit tous les automorphismes de groupes du groupe $\text{Homeo}_0(M)$, pour une variété compacte M .

Théorème 9. *(Whittaker [53]) Pour deux variétés compactes M et N et pour tout isomorphisme de groupes $\varphi : \text{Homeo}_0(M) \rightarrow \text{Homeo}_0(N)$, il existe un homéomorphisme $h : M \rightarrow N$ tel que le morphisme φ est l'application $f \mapsto h \circ f \circ h^{-1}$.*

Ce théorème a été généralisé par Filipkiewicz (voir [21]) au cas des groupes de difféomorphismes en utilisant le théorème puissant de Montgomery et Zippin qui caractérise les groupes de Lie parmi les groupes localement compacts. L'idée de la preuve du théorème de Whittaker est la suivante : on voit algébriquement notre variété M en considérant le sous-groupe G_x du groupe des homéomorphismes de M constitué des homéomorphismes qui fixent le point x de la variété M . On montre alors que pour tout point x de M , il existe un unique point y_x de N tel que $\varphi(G_x)$ est le groupe des homéomorphismes de N isotopes à l'identité qui fixent le point y_x . On pose alors $h(x) = y_x$ et on constate d'une part que h est bien un homéomorphisme et d'autre part que l'homéomorphisme h vérifie bien la relation donnée par l'énoncé du théorème. Cependant, la démonstration de Whittaker fait intervenir de manière fondamentale le fait que l'on ait un isomorphisme de groupe et ne se généralise pas a priori simplement aux cas de morphismes de groupes. Voici une conjecture que l'on peut faire dans le cas d'un morphisme de groupes.

Conjecture 6. *Pour toute variété compacte M , tout morphisme de groupes $\text{Homeo}_0(M) \rightarrow \text{Homeo}_0(M)$ est soit trivial, soit un automorphisme de la forme décrite dans le théorème.*

On peut aussi s'intéresser aux morphismes de groupes du groupe $\text{Homeo}_0(M)$ vers le groupe des homéomorphismes d'une autre variété $\text{Homeo}_0(N)$. Je m'intéresse par exemple à la question suivante.

Conjecture 7. *On note φ_0 et φ_1 les morphismes de groupes du groupe $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ vers $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ définis respectivement par :*

$$f \rightarrow ((x, y) \mapsto (f(x), y)).$$

$$f \rightarrow ((x, y) \mapsto (f(x), f(y))).$$

On conjecture que tout morphisme de groupes φ de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ vers $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ est semi-conjugué à l'une des deux actions ci-dessus.

On peut aussi essayer de regarder les morphismes de groupes entre groupes d'homéomorphismes de surfaces. On peut notamment se poser la question suivante (et des généralisations de celle-ci).

Conjecture 8. *Notons $\mathbb{T}^2 - D$ le tore \mathbb{T}^2 auquel on a retiré un disque ouvert. Notons $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2 - D)$ la composante connexe de l'identité du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{T}^2 - D$ à support inclus dans l'intérieur de cette surface. On conjecture alors que tout morphisme de groupe de $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2 - D)$ vers $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ est induit par une inclusion de $\mathbb{T}^2 - D$ dans \mathbb{T}^2 .*

Dans le dernier chapitre de cette thèse, on verra une preuve de la conjecture 6 dans le cas du cercle. Notons que ce théorème n'est pas nouveau : il était déjà connu de Matsumoto (voir [41]). Comme nous ne connaissions pas l'existence de l'article de Matsumoto au moment de rédiger la démonstration de ce résultat et comme la preuve est un peu différente de celle présentée dans [41], nous avons choisi de le présenter dans le septième chapitre de cette thèse.

Théorème 10. *Tout morphisme de groupes $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1) \rightarrow \text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ est soit trivial, soit une conjugaison par un homéomorphisme du cercle (qui renverse éventuellement l'orientation).*

La preuve, comme celle dans [41], fait intervenir la classe d'Euler bornée pour les actions de groupes sur le cercle (voir [27] et [28]).

Première partie

Longueur des commutateurs et norme de fragmentation

Sommaire

2	Norme de fragmentation sur l'anneau ouvert	27
3	Norme de fragmentation sur le tore	36
3.1	Fragmentation et ensemble de rotation	36
3.1.1	Preuve de la proposition 3.3	37
3.1.2	Preuve de la proposition 3.2	37
3.1.3	Conséquences	39
3.2	Un peu plus sur la fragmentation dans le tore	39
4	Commutator length of diffeomorphisms of the closed annulus	45
4.1	Introduction	45
4.2	Quasimorphisms on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$	47
4.3	Estimation of the commutator length	49
4.3.1	Lower bound of the commutator length for $r = 0$	50
4.3.2	Upper bound of the commutator length for $r = 0$	50
	First step : getting a homeomorphism with a lift which fixes pointwise the boundary by composing with k commutators . .	50
	Second step : a homeomorphism with a lift which pointwise fixes the boundary can be written as a product of 4 commutators	51
4.3.3	Case $r > 0$	53
4.4	Estimation of the fragmentation norm	54
4.4.1	Fragmentation norm on $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$	54
4.4.2	Proof of Proposition 4.3	55
	Lower bound for the fragmentation norm	55
	Upper bound for the fragmentation norm	56
4.5	Generalization to other surfaces	56
4.5.1	Case of open surfaces	57
4.5.2	Case of other compact oriented surfaces with boundary	57

Chapitre 2

Norme de fragmentation sur l'anneau ouvert

On note $\mathring{\mathbb{A}}$ l'anneau $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soit r un entier supérieur ou égal à 0. L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *La norme de fragmentation Frag_r est majorée par 4 sur $\text{Diff}_0^r(\mathring{\mathbb{A}})$.*

Remarque Ceci implique en particulier que la norme de fragmentation est bornée dans le cas $r = 3$, ce qui n'était pas connu auparavant.

Soit α la courbe de \mathbb{A} définie par :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{A} \\ t &\mapsto (t, 0) \end{aligned} .$$

On note β une courbe C^∞ compactement isotope à α . Les relevés de α à \mathbb{R}^2 sont donnés, pour $i \in \mathbb{Z}$, par :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, i) \end{aligned} .$$

On note $\tilde{\beta}_i$ le relevé de β qui coïncide avec $\tilde{\alpha}_i$ sur un voisinage de $-\infty$. Lorsque c est une courbe simple, on dit qu'une famille de points de c

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est c -ordonnée si et seulement si :

$$c^{-1}(x_1) < c^{-1}(x_2) < \dots < c^{-1}(x_n).$$

Le théorème précédent va découler de la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Il existe deux difféomorphismes f_1 et f_2 de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A})$, chacun à support dans un disque, tels que :*

$$f_1 \circ f_2(\beta(\mathbb{R})) = \alpha(\mathbb{R}).$$

Preuve du théorème 2.1. Soit f un difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(\mathring{\mathbb{A}})$. La courbe $f(\alpha)$ est une courbe de classe C^r . On la perturbe légèrement pour obtenir une courbe β de classe C^∞ de sorte que l'ensemble $\alpha(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\beta)(\mathbb{R})$ ne contienne pas de courbe essentielle. D'après la proposition précédente, il existe alors deux difféomorphismes f_1 et f_2 dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A})$ tels que $f_1 \circ f_2(\alpha(\mathbb{R})) = \beta(\mathbb{R})$. Il existe alors un difféomorphisme g_1 dans $\text{Diff}_0^r(\mathring{\mathbb{A}})$ supporté dans un disque fermé plongé dans $\mathring{\mathbb{A}}$ dont la restriction à un voisinage V de $\alpha(\mathbb{R})$ coïncide avec $f^{-1} \circ f_1 \circ f_2|_V$. On pose alors :

$$g_2 = g_1^{-1} \circ f^{-1} \circ f_1 \circ f_2.$$

Le difféomorphisme g_2 est supporté dans le complémentaire de V donc est supporté dans un disque. On a donc :

$$f = f_1 \circ f_2 \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}$$

et la norme de fragmentation de f est majorée par 4, ce que l'on voulait démontrer. \square

Preuve de la proposition 2.2. Pour pouvoir énoncer des lemmes permettant de démontrer cette proposition, nous avons besoin d'introduire des notations. Soit I , un segment non réduit à un point inclus dans $\alpha(\mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R})$. On dit que le segment I est un *morceau en place* (voir la figure 2.1) où les segments I_1 et I_2 sont en place) si :

- l'application $\beta^{-1} \circ \alpha$ est croissante de $\alpha^{-1}(I)$ vers $\beta^{-1}(I)$.
- les ensembles $\tilde{\alpha}_0(\alpha^{-1}(I))$ et $\tilde{\beta}_0(\beta^{-1}(I))$ coïncident.

Ceci revient à dire que, quitte à reparamétriser α et β , les courbes α et β sont compactement isotopes relativement à I .

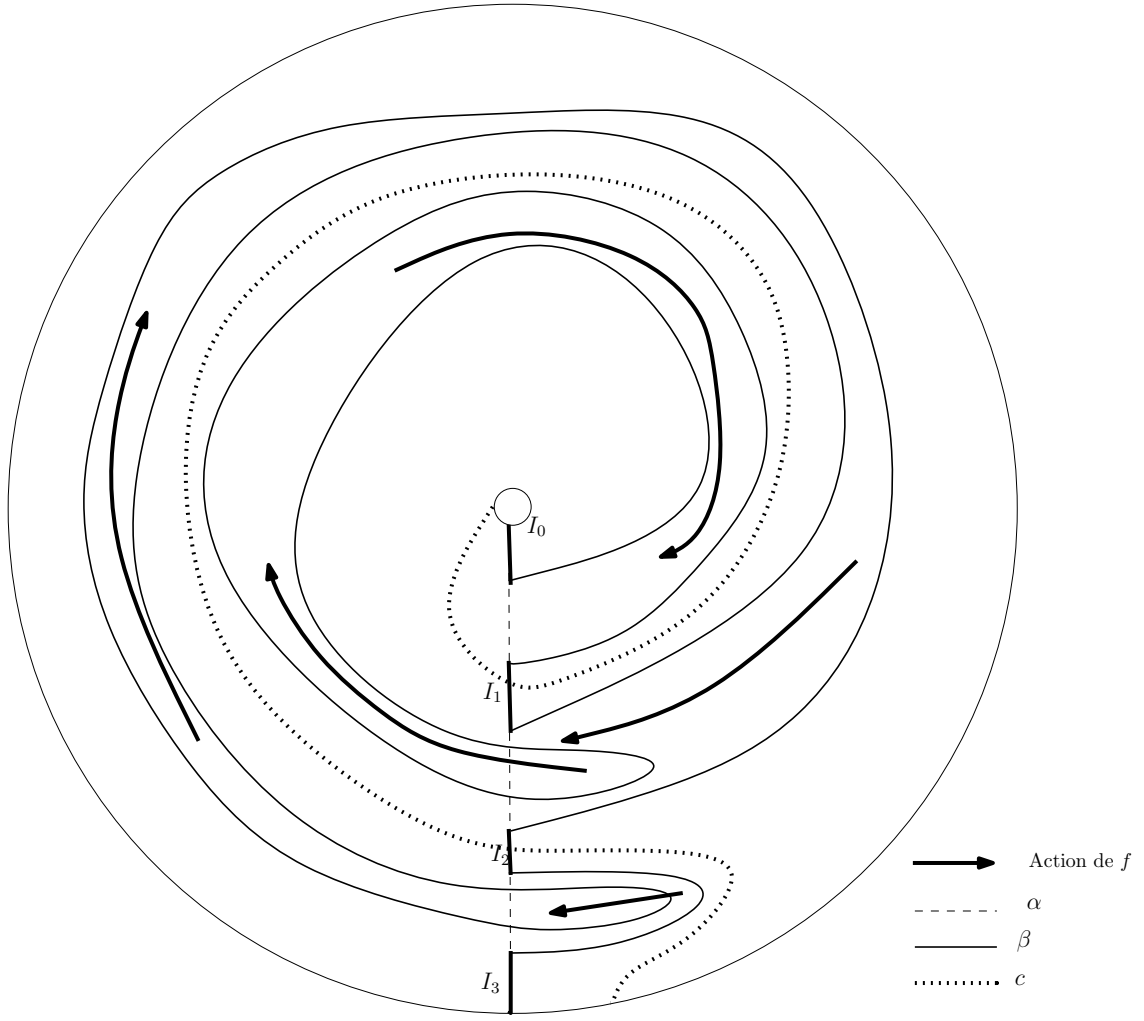
Si un segment I est un morceau en place, on appelle origine de I le point $\text{or}(I) = \alpha(\min(\alpha^{-1}(I))) = \beta(\min(\beta^{-1}(I)))$ et extrémité de I le point $\text{ex}(I) = \alpha(\max(\alpha^{-1}(I))) = \beta(\max(\beta^{-1}(I)))$. Enfin, on dit qu'une courbe $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$ *traverse l'anneau* si $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_1 \circ c(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} p_1 \circ c(t) = -\infty$, où p_1 désigne la projection $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. On est maintenant en mesure de caractériser l'existence d'un difféomorphisme à support dans un disque qui envoie $\beta(\mathbb{R})$ sur $\alpha(\mathbb{R})$.

Lemme 2.3. *Soit c , une courbe simple continue qui traverse l'anneau \mathbb{A} . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (P1) *Il existe un difféomorphisme f de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A} - c(\mathbb{R}))$ qui vérifie $f(\beta(\mathbb{R})) = \alpha(\mathbb{R})$.*
- (P2) *Il existe une famille finie de morceaux en place (I_1, I_2, \dots, I_n) deux à deux disjoints dont la famille des origines associée $(\text{or}(I_1), \text{or}(I_2), \dots, \text{or}(I_n))$ est α -ordonnée et β -ordonnée, ainsi qu'un réel t_0 dans $(-\infty, \text{or}(I_1))$ et un réel t_1 dans $(\text{or}(I_n), +\infty)$ qui vérifient les propriétés suivantes :*

- les restrictions de α et de β à $(-\infty, t_0) \cup (t_1, +\infty)$ coïncident.
- l'intersection de la courbe c avec $\alpha(\mathbb{R}) \cup \beta(\mathbb{R})$ est incluse dans l'image par α de :

$$(-\infty, t_0) \cup (t_1, +\infty) \cup \bigcup_{k=1}^n \text{int}(I_k).$$

FIGURE 2.1 – Lemme 2.3 : (P2) \Rightarrow (P1)

Preuve du lemme 2.3. On commence par prouver la réciproque du lemme. On suppose (P2). On pose $I_0 = \alpha((-\infty, t_0])$, $I_{n+1} = \alpha([t_1, +\infty))$ ($\text{or}(I_{n+1}) = \alpha(t_1)$ $\text{ex}(I_0) = \alpha(t_0)$). Quitte à ne conserver de la famille (I_1, I_2, \dots, I_n) que les intervalles qui rencontrent c , on peut supposer que chacun des intervalles I_j rencontre c , ce que nous ferons par la suite. Notons $t_k = \alpha^{-1}(\text{or}(I_k))$, $t'_k = \beta^{-1}(\text{or}(I_k))$, $\tau_k = \alpha^{-1}(\text{ex}(I_k))$ et $\tau'_k = \beta^{-1}(\text{ex}(I_k))$.

On va construire par récurrence une suite de difféomorphismes $(f_k)_{-1 \leq k \leq n}$ de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A} - c(\mathbb{R}))$ qui vérifie :

1. pour $k \geq 0$, $f_k(\beta(-\infty, t'_k)) = \alpha(-\infty, t_k)$;
2. pour $k \geq -1$, le difféomorphisme f_k fixe $\bigcup_{p=0}^{n+1} I_p$.

Notons qu'il suffit de poser $f = f_n$ pour montrer (P1). On pose $f_{-1} = \text{Id}_{\mathbb{A}}$. Supposons f_k construite, pour $-1 \leq k < n$. Chaque composante connexe de

$$\mathbb{R}^2 - (c(-\infty, t_{k+1}) \cup \bigcup_{p=0}^{n+1} I_p)$$

est homéomorphe à \mathbb{R}^2 car les composantes connexes du complémentaire d'un fermé

connexe dans le plan sont simplement connexes. Alors les chemins $\alpha|_{[\tau_{k+1}, t_{k+2}]}$ et $f_k \circ \beta|_{[\tau'_{k+1}, t'_{k+2}]}$ sont toutes deux contenues dans un disque qui ne rencontre pas $c(\mathbb{R})$ et qui ne rencontre

$$\alpha(-\infty, t_{k+1}) \cup \bigcup_{p=0}^{n+1} I_p$$

qu'en les extrémités de ces deux courbes.

Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Soient $\alpha' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ et $\beta' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$, deux arcs simples dans le disque fermé \mathbb{D}^2 qui ne rencontrent le bord du disque qu'en leurs extrémités. Alors il existe un difféomorphisme du disque isotope à l'identité relativement au bord du disque et qui envoie $\alpha'([0, 1])$ sur $\beta'([0, 1])$.*

Il existe un difféomorphisme $C^\infty \tilde{f}_{k+1}$ de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A} - c(\mathbb{R}))$ qui fixe

$$\alpha(-\infty, t_k) \cup \bigcup_{p=0}^{n+1} I_p$$

et envoie $f_k \circ \beta|_{[\tau'_{k+1}, t'_{k+2}]}$ sur $\alpha|_{[\tau_{k+1}, t_{k+2}]}$. Il suffit alors de poser $f_{k+1} = \tilde{f}_{k+1} \circ f_k$ pour achever la récurrence.

Montrons l'implication directe. Supposons (P1). Considérons un réel t_0 tel que $\alpha((-\infty, t_0])$ est en dehors du support de f et un réel t_1 tel que $\alpha([t_1, +\infty))$ soit en dehors du support de f . On note $(I_j)_{0 \leq j \leq n}$ la famille des adhérences des composantes connexes du complémentaire dans $\alpha(t_0, t_1)$ du support de f qui rencontrent $c(\mathbb{R})$, ordonnées suivant l'ordre induit par α . Alors la propriété (P2) est vérifiée en prenant cette famille d'intervalles puisque f vaut l'identité sur ces intervalles. \square

Nous aurons besoin d'une définition supplémentaire pour énoncer un lemme nécessaire à la démonstration de la proposition 2.2.

Définition 2.1. *Notons c_1, c_2, α_1 et α_2 des courbes simples qui traversent l'anneau \mathbb{A} . On suppose que les courbes c_1 et α_1 sont transverses et ont un nombre fini de points d'intersection tout comme les courbes c_2 et α_2 . On dit que les courbes c_1 et c_2 rencontrent respectivement α_1 et α_2 dans le même ordre si la propriété suivante est vérifiée : on note*

$$c_1(\mathbb{R}) \cap \alpha_1(\mathbb{R}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_{\alpha_1}}\}$$

et

$$c_2(\mathbb{R}) \cap \alpha_2(\mathbb{R}) = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_{\alpha_2}}\},$$

où les suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n_{\alpha_1}}$ et $(x'_i)_{1 \leq i \leq n_{\alpha_2}}$ sont respectivement c_1 et c_2 -ordonnées. Alors

- $n_{\alpha_1} = n_{\alpha_2} = n$;
- si l'on note σ la permutation de S_n telle que la famille $(x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ est α_1 -ordonnée, alors la suite $(x'_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ est α_2 -ordonnée ;

On dit de plus que les courbes c_1 et c_2 rencontrent respectivement α_1 et α_2 dans le même sens si, pour tout indice i , les bases de \mathbb{R}^2 $(c'(c^{-1}(x_i)), \alpha'(\alpha^{-1}(x_i)))$ et $(c'(c^{-1}(x'_i)), \beta'(\beta^{-1}(x'_i)))$ ont même orientation.

Le lemme suivant donne un critère combinatoire sur deux courbes simples α et β qui traversent l'anneau sous lequel on peut trouver deux difféomorphismes f_1 et f_2 supportés dans des disques tels que $f_2 \circ f_1(\beta(\mathbb{R})) = \alpha(\mathbb{R})$ (voir la figure 2.3 pour un exemple d'une courbe c décrite par le lemme).

Lemme 2.5. *Supposons qu'il existe une courbe simple $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$ de classe C^1 qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *la courbe c traverse l'anneau \mathbb{A} ;*
2. *la courbe c est transverse à α , à β , rencontre ces courbes en un nombre fini de points et ne rencontre pas $\alpha(\mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R})$;*
3. *la courbe c rencontre les courbes α et β dans le même ordre et dans le même sens.*

Dans ce cas, il existe des difféomorphismes f_1 et f_2 supportés dans des disques qui vérifient :

$$f_2 \circ f_1(\beta(\mathbb{R})) = \alpha(\mathbb{R}).$$

Preuve du lemme 2.5. On note T un voisinage tubulaire de c . On va construire un difféomorphisme f_1 de $\text{Diff}_0^\infty(T)$ qui envoie un voisinage de x'_i dans β sur un voisinage de x_i dans α . Ensuite, le lemme 1 appliqué à α et à $f_1 \circ \beta$ permettra d'obtenir l'existence d'un difféomorphisme f_2 de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A} - c(\mathbb{R}))$ tel que :

$$f_2 \circ f_1(\beta(\mathbb{R})) = \alpha(\mathbb{R}).$$

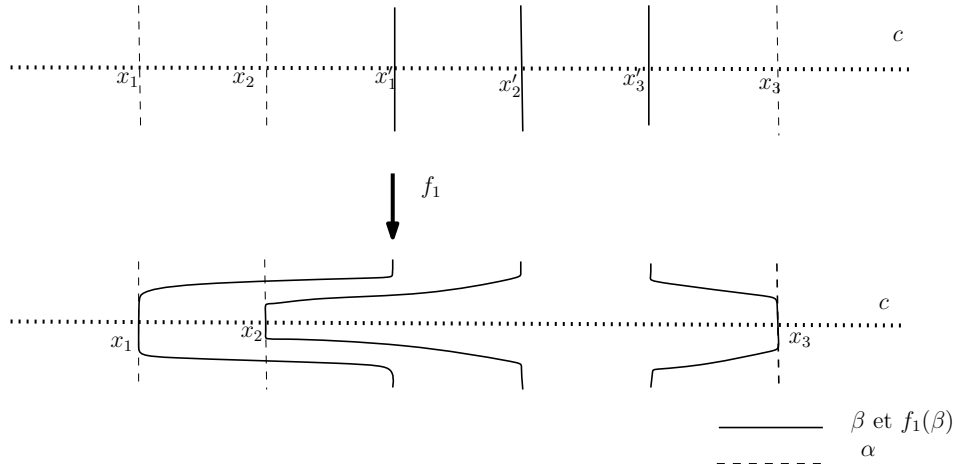


FIGURE 2.2 – Preuve du lemme 2.5 : action de l'homéomorphisme f_1 sur la courbe β

Détaillons maintenant la construction de f_1 . Prenons le voisinage tubulaire T suffisamment petit de sorte que l'on puisse trouver un système de coordonnées qui identifie T à $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ et l'ensemble $c(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R} \times \{0\}$ et tel que l'intersection de α avec T soit une réunion de n droites de la forme $\{t_i\} \times (-1, 1)$ et l'intersection de β avec T soit une réunion de n ensembles de la forme $\{t'_i\} \times (-1, 1)$. On numérote les t_i et les t'_i de sorte que le point $(t_i, 0)$ du système de coordonnées corresponde au point x_i de l'anneau et le point $(t'_i, 0)$ du système de coordonnées au point x'_i de l'anneau. Maintenant, il suffit de prendre pour f_1 un difféomorphisme de T qui préserve le feuilletage horizontal, vaut l'identité près de $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ et envoie $\{t'_i\} \times [-1/2, 1/2]$ sur $\{t_i\} \times [-1/2, 1/2]$. Alors les courbes α et $f_1 \circ \beta$ vérifient les hypothèses du lemme 1, ce qui permet de conclure. \square

Il nous reste à finir la démonstration de la proposition.

On considère un lacet γ simple orienté C^∞ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Il existe un point x_0 de γ et un chemin simple $\delta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{A} - (\alpha(\mathbb{R}) \cup \beta(\mathbb{R}))$ tel que $\delta(0) = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_1 \circ \delta(t) = +\infty$;
2. le lacet γ rencontre la courbe α transversalement et en un seul point et rencontre la courbe β transversalement et en un seul point mais ne rencontre pas $\alpha \cap \beta$.

On considère un voisinage tubulaire ouvert V de γ et un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall t \in \alpha^{-1}(V), \varphi \circ \alpha(t) = (h_1(t), \frac{1}{2}) \\ \forall t \in \beta^{-1}(V), \varphi \circ \beta(t) = (h_2(t), 0) \end{cases},$$

où h_1 est un difféomorphisme de $\alpha^{-1}(V)$ sur \mathbb{R} et h_2 est un difféomorphisme de $\beta^{-1}(V)$ sur \mathbb{R} (on a pris soin de choisir V de sorte que $\alpha^{-1}(V)$ et $\beta^{-1}(V)$ soient des intervalles). On note alors, pour tout entier naturel i :

$$A_i = \varphi^{-1}([i, i+1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

On suppose dans ce qui suit que $p_2(\delta(\mathbb{R}) \cap V) \subset [0, \frac{1}{2}]$. Le cas $p_2(\delta(\mathbb{R}) \cap V) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ se traite de manière analogue. On va maintenant construire un chemin simple c qui vérifie les hypothèses du lemme 2.5 (voir la figure 2.3).

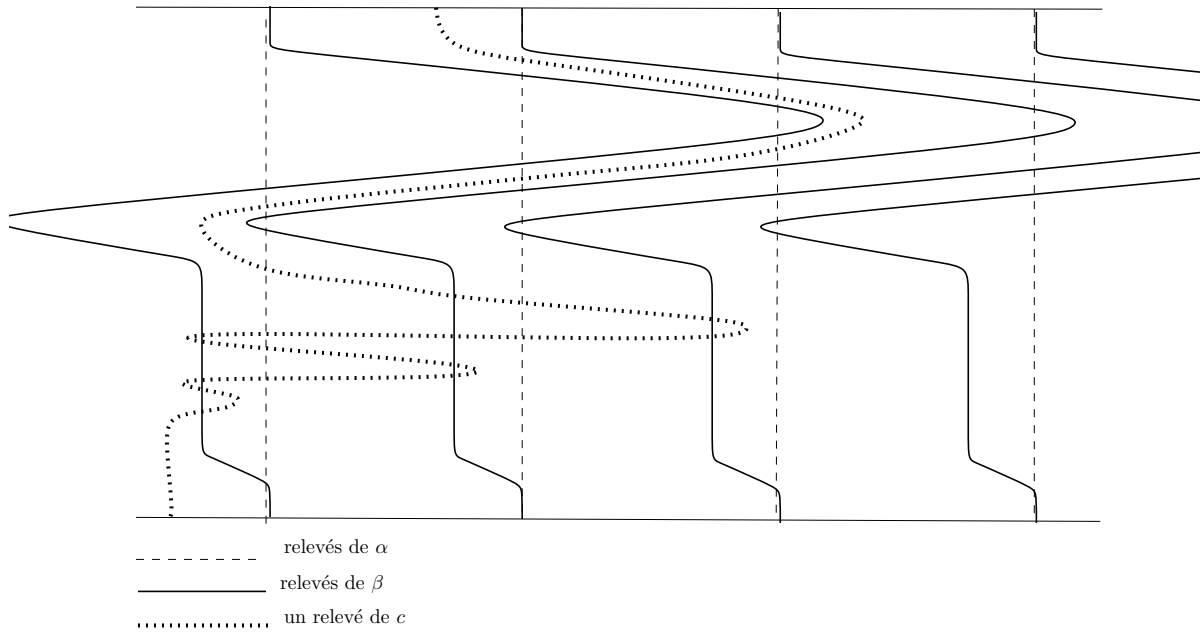


FIGURE 2.3 – Au revêtement universel : construction d’une courbe c qui vérifie les hypothèses du lemme 2.5

On commence par considérer un chemin simple $c_{-1} : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{A}$ qui joint le bord gauche de l’anneau \mathbb{A} au cercle $\varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ en longeant β , plus précisément :

1. la courbe c_{-1} ne rencontre $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ qu’en son extrémité $c_{-1}(0)$;
2. $\forall t \leq A, c_{-1}(t) = (t, \frac{1}{4})$, où A est choisi de sorte que, pour $t \leq A$, $\beta(t) = \alpha(t) = (t, 0)$;

3. la courbe c_{-1} ne rencontre pas β ;
4. la courbe c_{-1} est transverse à α (et donc ne rencontre la courbe α qu'en un nombre fini de points).

On note A_{-1} l'anneau bordé par $\{A\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et par $\varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On note $l = l(c_{-1}, \alpha)$. On va construire la courbe c comme concaténé de courbes simples $c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{l-1}$ définies sur $[0, 1]$ et d'une courbe simple c_l définie sur $[0, +\infty)$ telles que :

1. l'image de la courbe c_i est incluse dans A_i pour tout entier i dans l'intervalle $[0, l-1]$;
2. l'extrémité de c_i coïncide avec l'origine de c_{i+1} pour tout entier i dans l'intervalle $[0, l-1]$;
3. chaque courbe c_i est transverse à α et à β et ne rencontre pas $\alpha(\mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R})$;
4. pour tout entier i dans l'intervalle $[-1, l-2]$, on a :

$$l(c_{i+1}, \alpha) = l(c_i, \alpha) - 1;$$

5. pour chaque entier i dans l'intervalle $[-1, l-1]$, la courbe c_{i+1} rencontre β dans le même ordre et dans le même sens que c_i rencontre α .

De plus, on va construire la courbe c_l de sorte que :

- elle rencontre $\bigcup_{j < l} A_j$ uniquement en son origine ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_1 \circ c_{l(c_{-1}, \alpha)} = +\infty$;
- elle ne rencontre ni α , ni β .

Vues les propriétés ci-dessus, on obtient directement que le chemin concaténé $c_{-1}c_0c_1 \dots c_l$ vérifie les hypothèses du lemme 2.5. Une telle construction implique donc la proposition 2.2.

On va maintenant construire par récurrence des chemins c_i qui vérifient les propriétés ci-dessus.

Supposons c_{-1}, c_0, \dots, c_i construits et construisons c_{i+1} .

Cas $i < l-1$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.6. *Il existe une courbe simple $\hat{\alpha}_i : [0, 1] \rightarrow A_i$ qui joint les deux composantes du bord de l'anneau A_i , est transverse à c_i , ne touche le bord de A_i qu'en son origine et son extrémité, ne rencontre pas α et vérifie :*

$$l(c_i, \hat{\alpha}_i) = l(c_i, \alpha) - 1.$$

Preuve du lemme 2.6. Notons \tilde{c}_i un relevé de c_i et notons :

$$\Lambda_{max} = \max \{l \in \mathbb{Z}, \tilde{c}_i(\mathbb{R}) \cap \tilde{\alpha}_l(\mathbb{R}) \neq \emptyset\};$$

$$\Lambda_{min} = \min \{l \in \mathbb{Z}, \tilde{c}_i(\mathbb{R}) \cap \tilde{\alpha}_l(\mathbb{R}) \neq \emptyset\}.$$

On note D_{max} la composante connexe de $\mathbb{R}^2 - \tilde{\alpha}_{\Lambda_{max}}(\mathbb{R})$ qui contient $\tilde{\alpha}_{\Lambda_{max}+1}(\mathbb{R})$ et G_{min} la composante connexe de $\mathbb{R}^2 - \tilde{\alpha}_{\Lambda_{min}}(\mathbb{R})$ qui contient $\tilde{\alpha}_{\Lambda_{min}-1}(\mathbb{R})$. On note $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{A}$ le revêtement universel de l'anneau,

$$K_{max} = \Pi(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \tilde{c}_i([0, 1]) \cap D_{max}\})$$

et

$$K_{min} = \Pi(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \tilde{c}_i([0, 1]) \cap G_{min}\}).$$

Il suffit alors de prendre pour $\hat{\alpha}_i$ une courbe qui joint les deux composantes du bord de l'anneau A_i , est transverse à c_i , ne touche le bord de A_i qu'en son origine et son extrémité et ne rencontre ni α , ni K_{min} , ni K_{max} (cela est possible car la réunion de K_{min} , K_{max} et α ne déconnectent pas les deux composantes du bord de l'anneau A_i). En effet, dans ce cas la courbe \tilde{c}_i n'intersecte ni le relevé de $\hat{\alpha}_i$ à droite de $\tilde{\alpha}_{\Lambda_{max}}$ ni celui à gauche de $\tilde{\alpha}_{\Lambda_{min}}$. \square

Notons φ_i un difféomorphisme de $Diff_0^\infty(\mathbb{A})$ qui envoie A_i sur A_{i+1} , $\alpha(\mathbb{R}) \cap A_i$ sur $\beta(\mathbb{R}) \cap A_{i+1}$ et $\hat{\alpha}_i(\mathbb{R})$ sur $\alpha(\mathbb{R}) \cap A_{i+1}$. Enfin, notons c_{i+1} l'image de la courbe c_i par φ_i . Remarquons que le difféomorphisme φ_i envoie K_{min} dans $\mathbb{R} \times (1/2, 1]$ et K_{max} dans $\mathbb{R} \times [0, 1/2)$. Ainsi, on peut choisir le difféomorphisme φ_i et $\hat{\alpha}_i$ de sorte que l'origine de la courbe c_{i+1} coïncide avec l'extrémité de la courbe c_i sauf dans les deux cas suivants :

- le point $c_i(0)$ appartient à K_{min} (ce qui implique que $c_{i+1}(0)$ appartiendra à $\mathbb{R} \times (1/2, 1)$) et le point $c_i(1)$ appartient à $\mathbb{R} \times (0, 1/2)$.
- le point $c_i(0)$ appartient à K_{max} (ce qui implique que $c_{i+1}(0)$ appartiendra à $\mathbb{R} \times (0, 1/2)$) et le point $c_i(1)$ appartient à $\mathbb{R} \times (1/2, 1)$.

Oublions pour l'instant ces deux cas particuliers dont nous expliquerons le traitement ultérieurement et supposons donc que l'extrémité de la courbe c_i coïncide avec l'origine de la courbe c_{i+1} . Dans ce cas le difféomorphisme φ_i envoie le graphe orienté $(\alpha(\mathbb{R}) \cap A_i) \cup c_i$ sur le graphe orienté $(\beta(\mathbb{R}) \cap A_{i+1}) \cup c_{i+1}$. Cela implique que la propriété 5. sur l'ordre et le sens des intersections est vérifiée pour c_{i+1} . De plus, le difféomorphisme φ_i envoie le graphe orienté $\hat{\alpha}_i \cup c_i$ sur le graphe orienté $(\alpha(\mathbb{R}) \cap A_{i+1}) \cup c_{i+1}$. Il découle, d'après la propriété de $\hat{\alpha}_i$ garantie par le lemme 2.6, que la propriété 4. ($l(c_{i+1}, \alpha) = l(c_i, \alpha) - 1$) est vérifiée pour c_{i+1} . La courbe c_{i+1} vérifie bien toutes les propriétés souhaitées.

Revenons maintenant aux difficultés évoquées précédemment. Pour les éviter à toute étape de la récurrence, il suffit d'imposer aux courbes c_i de vérifier une propriété supplémentaire (imposer cette condition revient à donner à chaque étape des conditions supplémentaires que doivent vérifier le difféomorphisme φ_i et la courbe $\hat{\alpha}_i$) :

6. Si $c_i(0)$ appartient à K_{min} et si c_i intersecte α , alors $c_i(1) = \varphi^{-1}((i+1, \frac{3}{4}))$ et c_i a nombre d'intersection 1 avec α . Dans tous les autres cas, on a $c_i(1) = \varphi^{-1}((i+1, \frac{1}{4}))$ et c_i a nombre d'intersection algébrique 0 avec α .

Vu de manière plus globale, la concaténation des courbes c_i aura l'allure suivante. Notons \tilde{c}_i un relevé de la courbe c_i . Notons l'_i le nombre de relevés de α intersectés par \tilde{c}_i qui sont à gauche du point $c_i(0)$. Notons que ce nombre est nul si et seulement si $c_i(0)$ appartient à K_{min} . Alors, tant que $l'_i > 0$, la construction indiquée implique que c_i a nombre d'intersection algébrique 0 avec α , $c_i(1) = \varphi^{-1}((i+1, \frac{1}{4}))$ et $l'_{i+1} = l'_i - 1$. Notons i_0 le premier instant pour lequel $l'_{i_0} = 0$. Alors, pour tout entier $l-1 > i \geq i_0$, on a $l'_i = 0$ et la courbe c_i a nombre d'intersection 1 avec α et $c_i(1) = \varphi^{-1}((i+1, \frac{3}{4}))$. Enfin, la courbe c_{l-1} ne rencontrera pas la courbe α mais rencontrera un relevé de la courbe β avec nombre d'intersection algébrique 1 et $c_{l-1}(1) = \varphi^{-1}((i+1, \frac{1}{4}))$.

Vérifions maintenant qu'avec cette construction, aucun des deux cas à problème précédemment évoqués n'apparaissent. Lorsque le point $c_i(0)$ n'appartient pas à K_{min} , alors $c_i(1) = \varphi^{-1}((i+1, \frac{1}{4}))$ n'appartient pas à $\mathbb{R} \times (1/2, 1)$: on n'est dans aucun des deux

cas à problèmes. Si le point $c_i(0)$ appartient à K_{min} , alors le point $c_i(1)$ n'appartient pas à $\mathbb{R} \times (0, 1/2)$ donc, là aussi, la construction précédente s'applique.

Cas $i = l - 1$. Dans ce cas, on a $l(c_{l-1}, \alpha) = 0$ et on termine la construction par la construction de c_l comme suit. On a $c_{l-1}(1) = \varphi^{-1}((l - 1, \frac{1}{4}))$. Par conséquent, le point $c_{l-1}(1)$ est dans la même composante connexe de $\mathbb{A} - (\alpha(\mathbb{R}) \cup \beta(\mathbb{R}))$ que la courbe δ . Il suffit alors de prendre pour c_l la concaténation d'une courbe qui joint $c_i(1)$ à un point $\delta(t_0)$ de δ , en évitant α et β et en ne rencontrant $\bigcup_{j < l} A_j$ que en $c_i(1)$, et de $\delta|_{[t_0, +\infty)}$. On aura choisi le point $\delta(t_0)$ de sorte que la courbe $\delta|_{[t_0, +\infty)}$ ne rencontre pas $\bigcup_{j < l} A_j$. Le chemin c_l vérifie alors les conditions requises. \square

Chapitre 3

Norme de fragmentation sur le tore

3.1 Fragmentation et ensemble de rotation

Soit A une partie de \mathbb{R}^2 . On dit que A est *incluse dans une bande rationnelle de largeur* $M \geq 2$ si et seulement si il existe une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par l'origine $(0, 0)$ et deux couples d'entiers relatifs (m_1, n_1) et (m_2, n_2) tels que :

- la partie A est incluse dans la bande ouverte B délimitée par les droites $D + (m_1, n_1)$ et $D + (m_2, n_2)$;
- le cardinal de l'ensemble des droites incluses dans B de la forme $D + (k, k')$, où k et k' sont des entiers relatifs, est inférieur ou égal à $M - 2$.

Pour une partie A compacte de \mathbb{R}^2 , on définit la *largeur* $\text{largeur}(A)$ de A comme le plus petit entier M tel que la partie A est incluse dans une bande rationnelle de largeur M . Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Pour un élément f de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$, on note $\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f)$ le nombre minimal de facteurs nécessaires pour écrire f en tant que produit d'homéomorphismes dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$ supportés dans des anneaux.

Théorème 3.1. *Soit f un difféomorphisme de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$. Notons \tilde{f} un relevé de f et $\text{rot}(\tilde{f})$ l'ensemble de rotation de ce relevé. On a alors :*

$$\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f) \leq \left\lfloor \frac{\text{largeur}(\text{rot}(\tilde{f}))}{2} \right\rfloor + 1.$$

Ce théorème va immédiatement découler de deux proposition. Avant d'énoncer la première d'entre elles, nous avons besoin d'une définition.

Définition 3.1. *Soit γ un lacet simple du tore non trivial en homologie. Soit f un difféomorphisme de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$. On note F un relevé de f et $\tilde{\gamma}_i$ les composantes connexes de $\Pi^{-1}(\gamma)$. On dit que le lacet γ est étiré N fois par f si et seulement si :*

$$\#\{n \in \mathbb{Z}, F(\tilde{\gamma}_0) \cap \tilde{\gamma}_n \neq \emptyset\} = N.$$

Proposition 3.2. *Soit f un difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$. S'il existe un lacet simple γ non-trivial en homologie qui est étiré au plus N fois par f , alors :*

$$\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f) \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 2.$$

La deuxième proposition reprend les idées d'une démonstration d'un théorème de Kwapisz.

Proposition 3.3. *Soit f un difféomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$. Si l'ensemble de rotation d'un (donc de tout) relevé de l'homéomorphisme f est inclus dans une bande rationnelle de taille $M \geq 2$, alors il existe un lacet simple γ non-trivial en homologie qui est étiré au plus $M - 2$ fois par f .*

Il suffit d'appliquer successivement les propriétés 3.3 puis 3.2 pour obtenir le théorème 3.1.

3.1.1 Preuve de la proposition 3.3

Étant donnés deux plongements propres de \mathbb{R} d'images D_0 et D_1 (qui sont naturellement orientées), on notera $D_0 < D_1$ si et seulement si les droite topologiques D_0 et D_1 sont disjointes et la droite topologique D_0 est inclus dans la composante connexe de $\mathbb{R}^2 - D_1$ qui est à gauche de D_1 . Si u est un vecteur de \mathbb{R}^2 , on note T_u la translation du plan de vecteur u .

Soit F un relevé de l'homéomorphisme f . Quitte à conjuguer l'homéomorphisme F par un élément de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ et à composer par une translation de vecteur à coordonnées entières, on peut supposer que l'ensemble de rotation de F est inclus dans la bande ouverte $(0, M) \times \mathbb{R}$. Dans ce cas, les applications F , $T_{1,0}$ et $T_{(M,0)} \circ F^{-1}$ commutent deux à deux et ont un ensemble de rotation inclus dans $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. D'après la proposition 3.1 et l'appendice B de [5], il existe une courbe simple γ du tore homotope à $\Pi(\{0\} \times \mathbb{R})$ telle que, si l'on note $\tilde{\gamma}$ une composante connexe de $\Pi^{-1}(\gamma)$, on ait :

1. $\tilde{\gamma} < F(\tilde{\gamma})$;
2. $\tilde{\gamma} < T_{(M,0)} \circ F^{-1}(\gamma)$.

Ces deux relations impliquent que

$$\tilde{\gamma} < F(\tilde{\gamma}) < \tilde{\gamma} + (M, 0)$$

et donc que le lacet γ est étiré au plus $M - 2$ fois par l'homéomorphisme F .

3.1.2 Preuve de la proposition 3.2

Dans le cas $N = 0$ ou $N = 1$, il existe un anneau A plongé dans le tore qui contient le lacet γ et son image par l'homéomorphisme f . Il existe alors une application f_1 dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$ supporté dans l'anneau A qui coïncide avec l'application f sur un voisinage

de la courbe γ . On pose alors $f_2 = f_1^{-1} \circ f$. L'application f_2 appartient bien au groupe $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$ et est supporté dans un anneau qui est le complémentaire d'un voisinage du lacet γ . De plus, on a $f = f_1 \circ f_2$ donc $\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f) \leq 2$.

Traisons maintenant par récurrence le cas $N \geq 2$. Quitte à perturber légèrement la courbe γ , on peut supposer que cette courbe est régulière. Notons $(\tilde{\gamma}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la famille des composantes connexes de $\Pi^{-1}(\gamma)$, de sorte que la courbe $\tilde{\gamma}_i$ soit incluse dans la bande délimitée par les droites topologiques $\tilde{\gamma}_{i-1}$ et $\tilde{\gamma}_{i+1}$. On peut supposer, quitte à faire un changement de coordonnées, que $\tilde{\gamma}_i = \{i\} \times \mathbb{R}$. Notons :

$$\begin{cases} n_{\max} = \max \{i \in \mathbb{Z}, F(\tilde{\gamma}_0) \cap \tilde{\gamma}_i \neq \emptyset\} \\ n_{\min} = \min \{i \in \mathbb{Z}, F(\tilde{\gamma}_0) \cap \tilde{\gamma}_i \neq \emptyset\} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} I = \Pi(F(\tilde{\gamma}_0(\mathbb{R})) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > n_{\max}\}) \\ J = \Pi(F(\tilde{\gamma}_0(\mathbb{R})) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < n_{\min}\}) \end{cases}.$$

On va montrer qu'il existe un lacet simple c isotope à γ qui est disjoint de γ , de I et de J . On considère l'anneau découpé par γ , c'est-à-dire une immersion surjective $\mathbb{A} = [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dont la restriction à l'intérieur de l'anneau $\mathring{\mathbb{A}}$ est un plongement et les images de $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ et de $\{1\} \times \mathbb{S}^1$ sont chacune égales à $\gamma(\mathbb{R})$. Les ensembles I et J du tore sont désormais vus comme sous ensembles de l'anneau via cette immersion. Chaque composante connexe de $I \cup J$ a ses deux extrémités dans une même composante de bord de l'anneau \mathbb{A} . Par conséquent, il existe un lacet simple fermé c homotope à chacune des composantes connexes du bord de l'anneau \mathbb{A} , inclus dans l'intérieur de cet anneau (i.e. disjoint de la courbe γ), qui est disjoint de I et de J .

On va maintenant construire un difféomorphisme h dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$ supporté dans le complémentaire d'un voisinage de c tel que la composée $h \circ f$ étire le lacet γ au plus $N - 2$ fois. Une fois l'existence d'un tel difféomorphisme montrée, une récurrence permet de conclure la preuve de la proposition 3.2.

Notons \tilde{c}_i la composante connexe de $\Pi^{-1}(c)$ comprise entre $\tilde{\gamma}_{i-1}$ et $\tilde{\gamma}_i$. Notons I' (respectivement J') la réunion des composantes connexes de $f(\gamma) - c$ qui contiennent une composante connexe de I (respectivement J). On considère l'anneau découpé par c que l'on note A . Pour les mêmes raisons que précédemment, il existe un lacet c' isotope à c et disjoint de c , de I' et de J' . On identifie l'anneau A à $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ de sorte que le lacet c' soit identifié au lacet $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{S}^1$. Soient $0 < r_1 < r_2 < \frac{1}{2} < r_3 < r_4 < 1$ de sorte que l'anneau ouvert $(r_1, r_4) \times \mathbb{S}^1$ contienne l'image de la courbe γ et que l'anneau $[r_2, r_3] \times \mathbb{S}^1$ ne rencontre pas les ensembles I' et J' . On considère alors un champ de vecteurs X radial supporté dans l'intérieur de A (identifié à un anneau ouvert du tore) tel que :

- pour un point (r, θ) de $[r_1, r_2] \times \mathbb{S}^1$, on a $X(r, \theta) = (-1, 0)$;
- pour un point (r, θ) de $[r_3, r_4] \times \mathbb{S}^1$, on a $X(r, \theta) = (1, 0)$.

Notons φ_X^t le flot à l'instant t de ce champ de vecteurs. Il existe alors un instant $t_0 > 0$ tel que $\varphi_X^{t_0}(I') \cap \gamma(\mathbb{S}^1) = \emptyset$ et $\varphi_X^{t_0}(J') \cap \gamma(\mathbb{S}^1) = \emptyset$. Il suffit alors de poser $h = \varphi_X^{t_0}$ pour conclure.

3.1.3 Conséquences

Proposition 3.4. *Tout difféomorphisme f obtenu comme temps 1 du flot d'un champ de vecteurs autonome a une norme de fragmentation dans des anneaux $\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f)$ inférieure ou égale à 4.*

Il suffit donc d'arriver à écrire tout difféomorphisme en tant que produit d'un nombre uniformément borné de difféomorphismes qui sont temps 1 du flot d'un champ de vecteurs autonome du tore pour montrer que la norme de fragmentation (et donc la longueur des commutateurs) est bornée.

Démonstration. Cette proposition est essentiellement une conséquence d'un théorème de Franks et Misiurewicz selon lequel tout difféomorphisme obtenu comme temps 1 du flot d'un champ de vecteurs autonome a un ensemble de rotation qui est de l'une des formes suivantes :

- un singleton ;
- un segment contenu dans une droite de pente rationnelle qui passe par le point $(0, 0)$;
- un segment de pente irrationnelle dont l'une des extrémités est le point $(0, 0)$.

Dans les deux premiers cas, l'ensemble de rotation est inclus dans une bande rationnelle de taille 2 et le théorème 3.1 permet directement d'en déduire que la norme de fragmentation dans des anneaux est majorée par 2 dans ce cas. Dans le dernier cas, il suffit de perturber un peu le champ de vecteurs qui définit f pour créer une orbite périodique. On obtient un difféomorphisme g temps 1 du flot d'un champ de vecteurs autonome dont l'ensemble de rotation contient le point $(0, 0)$ ainsi qu'un point distinct de $(0, 0)$ à coordonnées rationnelles : on vient de voir que ceci implique que $\text{Frag}_{\mathbb{A}}(g) \leq 2$. De plus, le difféomorphisme g peut être choisi arbitrairement proche de f donc on peut supposer que $\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f \circ g^{-1}) \leq 2$ en vertu du lemme de fragmentation (voir l'appendice B). On en déduit que $\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f) \leq 4$, ce qu'il fallait démontrer. \square

3.2 Un peu plus sur la fragmentation dans le tore

Dans cette section, nous allons tenter de trouver un critère pour que, étant donnés deux lacets fermés simples α et β , il existe un difféomorphisme supporté dans un anneau qui envoie la courbe β sur une courbe disjointe de α . Cela va permettre de mieux comprendre la quantité $\text{Frag}_{\mathbb{A}}$ définie dans la section précédente. Dans un premier temps, nous allons trouver une condition nécessaire sur des lacets simples essentiels α , β et c pour qu'il existe un homéomorphisme isotope à l'identité supporté dans le complémentaire de la courbe c qui envoie la courbe β sur une courbe disjointe de α . Dans, un deuxième temps, nous allons montrer qu'il existe toujours un lacet simple essentiel c qui vérifie la condition nécessaire précédente. Enfin, nous allons trouver sous quelles conditions supplémentaires la condition nécessaire précédente est suffisante.

Décrivons la condition nécessaire en question. Fixons deux lacets simples essentiels orientés isotopes α et β . Notons $(\tilde{\alpha}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la famille des composantes connexes orientées

(par l'orientation de α) de $\Pi^{-1}(\alpha(\mathbb{R}))$, où les courbes $\tilde{\alpha}_i$ sont numérotées de sorte que, pour $j > i$, la courbe $\tilde{\alpha}_j$ soit à droite de la courbe $\tilde{\alpha}_i$. De la même manière, on définit la famille $(\tilde{\beta}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des composantes connexes orientées de $\Pi^{-1}(\beta(\mathbb{R}))$.

On dit qu'un lacet simple essentiel c vérifie les conditions locales vis-à-vis de α et de β si les conditions suivantes sont vérifiées :

- la courbe c ne rencontre pas l'ensemble $\alpha(\mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R})$;
- notant \tilde{B}_i la bande ouverte délimitée par les courbes $\tilde{\beta}_i$ et $\tilde{\beta}_{i+1}$, la condition suivante est vérifiée : il existe un indice $j \in \mathbb{Z}$ tel que l'inclusion $\Pi^{-1}(c \cap \alpha) \cap \tilde{B}_i \subset \tilde{\alpha}_j$ est satisfaite.
- notant $\tilde{A}_{i'}$ la bande ouverte délimitée par les courbes $\tilde{\alpha}_{i'}$ et $\tilde{\alpha}_{i'+1}$, la condition suivante est vérifiée : il existe un indice $j' \in \mathbb{Z}$ tel que l'inclusion $\Pi^{-1}(c \cap \alpha) \cap \tilde{A}_{i'} \subset \tilde{\alpha}_{j'}$ est satisfaite.

Proposition 3.5. *Soit c un lacet simple essentiel du tore \mathbb{T}^2 . Supposons qu'il existe un homéomorphisme f dans le groupe $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ supporté dans le complémentaire d'un voisinage de la courbe c tel que la courbe $f(\beta)$ est disjointe de la courbe α . Alors la courbe c vérifie les conditions locales vis-à-vis de α et de β .*

Démonstration. Soit f un homéomorphisme qui vérifie l'hypothèse de la proposition. Notons \tilde{f} le relevé de l'homéomorphisme f qui fixe les points de $\Pi^{-1}(c)$. Nous allons voir que la proposition est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 3.6. *Fixons un indice i dans \mathbb{Z} . Notons $l \in \mathbb{Z}$ l'indice tel que la bande ouverte comprise entre $\tilde{\alpha}_{l-1}$ et $\tilde{\alpha}_l$ contienne la courbe $\tilde{f}(\tilde{\beta}_i)$. Avec ces notations, l'ensemble $\Pi^{-1}(c(\mathbb{R})) \cap B_i$ ne rencontre pas les droites topologiques $\tilde{\alpha}_{l'}$ pour $l' \leq l - 1$.*

Preuve du lemme 3.6. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un indice $l' \leq l - 1$ pour lequel $\Pi^{-1}(c) \cap \tilde{B}_i \cap \tilde{\alpha}_{l'} \neq \emptyset$. Notons \tilde{p} un point de ce dernier ensemble. On remarque que le point \tilde{p} est situé à droite de la droite topologique orientée $\tilde{\beta}_i$ et à gauche de la droite topologique $\tilde{f}(\tilde{\beta}_i)$. De plus, ces deux droites topologiques sont isotopes relativement au point \tilde{p} , d'où la contradiction. \square

On a aussi l'énoncé symétrique suivant :

Lemme 3.7. *Notons $l \in \mathbb{Z}$ l'indice tel que la bande ouverte comprise entre $\tilde{\alpha}_l$ et $\tilde{\alpha}_{l+1}$ contienne la courbe $\tilde{f}(\tilde{\beta}_{i+1})$. Avec ces notations, l'ensemble $\Pi^{-1}(c(\mathbb{R})) \cap \tilde{B}_i$ ne rencontre pas les droites topologiques $\tilde{\alpha}_{l'}$ pour $l' \geq l + 1$.*

Montrons maintenant la proposition à l'aide de ces deux lemmes. Tout d'abord, il est clair que la courbe c ne rencontre pas $\alpha \cap \beta$: un point de l'intersection de ces trois courbes est fixé par f donc appartient à $f(\beta) \cap \alpha$. Or, ce dernier ensemble est vide par hypothèse : on aboutit à une contradiction. Fixons un indice i dans \mathbb{Z} et notons $l \in \mathbb{Z}$ l'unique indice tel que la courbe $\tilde{f}(\tilde{\beta}_i)$ est comprise entre les courbes $\tilde{\alpha}_{l-1}$ et $\tilde{\alpha}_l$. Dans ce cas, la courbe $\tilde{f}(\tilde{\beta}_{i+1})$ sera comprise entre les courbes $\tilde{\alpha}_l$ et $\tilde{\alpha}_{l+1}$. On applique ensuite les deux lemmes précédents pour conclure que la courbe c vérifie la deuxième condition dans la définition des conditions locales. On montre de la même manière que cette courbe vérifie la troisième condition dans la définition des conditions locales. \square

Proposition 3.8. *Pour deux lacets α et β essentiels, simples et isotopes, il existe un lacet essentiel simple qui vérifie les conditions locales vis-à-vis des courbes α et β .*

Démonstration. Fixons un indice $i \in \mathbb{Z}$. Pour deux indices $p < q$, on note $\tilde{A}_{p,q}$ la bande ouverte située entre les courbes $\tilde{\alpha}_p$ et $\tilde{\alpha}_q$. Remarquons qu'il suffit de montrer qu'il existe un entier $l \in \mathbb{Z}$ et un lacet c simple essentiel dans le tore inclus dans $\Pi(\tilde{A}_{l-1,l+1} \cap \tilde{B}_i)$. On peut alors perturber ce lacet pour qu'il évite $\beta \cap \alpha$. Le lacet obtenu vérifiera alors les conditions locales vis-à-vis des lacets α et β . Notons l_{\min} (respectivement l_{\max}) le plus petit (respectivement le plus grand) indice $l \in \mathbb{Z}$ tel que la droite topologique $\tilde{\alpha}_l$ rencontre la bande \tilde{B}_i . On regarde ensuite le premier indice $l_0 \geq l_{\min}$ pour lequel l'ensemble $\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_{\min}-1,l})$ remplit la topologie du tore. Précisons ce qui précède. Notons $(a_l)_{l \geq l_{\min}}$ la suite des rangs des applications linéaires $H_1(\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_{\min}-1,l}), \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$. Cette suite est croissante et est stationnaire égale à 2 pour $l \geq l_{\max} + 1$. Notons l_0 le premier indice $l \geq l_{\min}$ pour lequel $a_{l_0} = 2$. Dans ce cas, comme l'ensemble $\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_0+1,l_{\max}+1})$ est disjoint de l'ensemble $\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{j_{\min}-1,l_0})$ qui remplit l'homologie du tore, l'application

$$H_1(\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_0+1,l_{\max}+1}), \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$$

est nulle. De plus, par définition de l_0 , l'application linéaire

$$H_1(\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_{\min}-1,l_0-1}), \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$$

n'est pas surjective. Par conséquent, l'ensemble $\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_0-1,l_0+1})$, qui est le complémentaire des fermés $\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_{\min}-1,l_0-1})$ et $\Pi(\tilde{B}_i \cap \tilde{A}_{l_0+1,l_{\max}+1})$, contient un lacet simple essentiel du tore qui vérifie les conditions locales. \square

Nous allons maintenant décrire des couples de lacets simples α et β pour lesquelles l'existence d'une courbe c qui vérifie les conditions locales implique qu'il existe un homéomorphisme supporté dans un anneau qui envoie la courbe β sur une courbe disjointe de la courbe α .

On se donne deux lacets simples orientés α et β . On suppose pour simplifier que ces deux lacets sont de classe C^1 et transverses (mais ce qui suit pourrait être adapté au cas où ces hypothèses ne seraient pas vérifiées). Notons $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ l'ensemble des points d'intersection des lacets α et β . Les indices de ces points d'intersection sont choisis de sorte que, si l'on parcourt le lacet β en partant du point x_1 en suivant le sens donné par l'orientation du lacet β , on rencontre successivement les points x_1, x_2, \dots, x_p . On note $\alpha_{[x_i, x_j]}$ (respectivement $\beta_{[x_i, x_j]}$) le chemin obtenu en parcourant le lacet α (respectivement β) depuis le point x_i jusqu'au point x_j dans le sens donné par l'orientation de α (respectivement β). On dira que le lacet β est *croissant* vis-à-vis du lacet α si et seulement si, pour tout indice $i \in [1, p]$, l'une des conditions suivantes est vérifiée (les indices étant pris modulo p) :

- la base des vecteurs-vitesse $(\alpha'(\alpha^{-1}(x_i)), \beta'(\beta^{-1}(x_i)))$ a même orientation que la base $(\alpha'(\alpha^{-1}(x_{i+1})), \beta'(\beta^{-1}(x_{i+1})))$;
- les bases $(\alpha'(\alpha^{-1}(x_i)), \beta'(\beta^{-1}(x_i)))$ et $(\alpha'(\alpha^{-1}(x_{i+1})), \beta'(\beta^{-1}(x_{i+1})))$ ont des orientations opposées et les courbes $\alpha_{[x_i, x_{i+1}]}$ et $\beta_{[x_i, x_{i+1}]}$ sont homotopes à extrémités fixes.

Par conséquent, le lacet β n'est pas croissant vis-à-vis de α si et seulement si il existe un indice i telle que le lacet formé de la concaténation des courbes $\alpha|_{[x_i, x_{i+1}]}$ et $\beta|_{[x_{i+1}, x_i]}$ est homotope au lacet trivial (voir la figure 3.1).

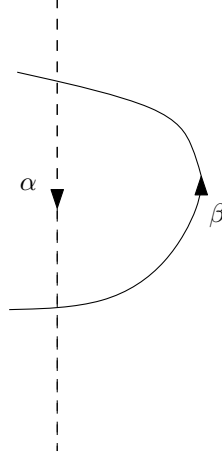


FIGURE 3.1 – Situation où le lacet β n'est pas croissant vis-à-vis de α

Nous aurons besoin du lemme suivant qui utilise l'hypothèse de croissance du lacet β vis-à-vis du lacet α (et qui justifie la terminologie utilisée) :

Lemme 3.9. *Notons $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des intersections de la droite topologique orientée $\tilde{\beta}_0$ avec $\tilde{\alpha}_l$, pour $l \in \mathbb{Z}$, indexée de sorte qu'elle soit croissante pour l'ordre induit sur la droite $\tilde{\beta}_0$. Alors cette suite est aussi croissante pour l'ordre induit par $\tilde{\alpha}_l$.*

Démonstration. Notons $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite croissante pour $\tilde{\beta}_0$ des intersections de la droite $\tilde{\beta}_0$ avec $\Pi^{-1}(\alpha)$. Nous allons montrer par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ que, pour tout indice $i \in \mathbb{Z}$, si l'on note $(\tilde{y}_n^i)_n$ la suite finie obtenue à partir de la suite $(\tilde{y}_n)_{-N \leq n \leq N}$ en ne conservant dans l'ordre que les éléments de cette suite qui appartiennent à la droite $\tilde{\alpha}_i$, alors la suite $(\tilde{y}_n^i)_n$ est croissante pour l'ordre induit sur la droite $\tilde{\alpha}_i$. Remarquons que cette dernière propriété implique le lemme.

La propriété est vraie lorsque $N = 0$.

Supposons la propriété précédente vraie pour un rang N et montrons-la au rang $N+1$. Notons i_0 l'indice tel que le point \tilde{y}_{N+1} appartient à la droite $\tilde{\alpha}_{i_0}$. Dans le cas où aucun des points de la suite $(\tilde{y}_n)_{-N \leq n \leq N}$ n'appartient à la droite $\tilde{\alpha}_{i_0}$, la suite $(\tilde{y}_n)_{-N \leq n \leq N+1}$ vérifie la propriété décrite ci-dessus. Dans le cas contraire, notons k le plus grand indice inférieur ou égal à N pour lequel le point \tilde{y}_k appartient à la droite $\tilde{\alpha}_{i_0}$. Si $k = N$, la définition de croissance du lacet β vis-à-vis du lacet α implique que le point \tilde{y}_{N+1} est après le point \tilde{y}_N pour l'ordre induit sur la droite $\tilde{\alpha}_{i_0}$: cela découle du fait que les courbes $\beta|_{[\Pi(\tilde{y}_N), \Pi(\tilde{y}_{N+1})]}$ et $\alpha|_{[\Pi(\tilde{y}_N), \Pi(\tilde{y}_{N+1})]}$ sont isotopes à extrémités fixes. Supposons maintenant que l'indice k est distinct de N . Notons j l'indice tel que le point \tilde{y}_N appartient à la droite $\tilde{\alpha}_j$. Nécessairement, cet indice est soit $i_0 - 1$, soit $i_0 + 1$. Remarquons que le point \tilde{y}_{k+1} appartient à la droite $\tilde{\alpha}_j$: dans le cas contraire, il existerait un indice l strictement supérieur à k et strictement inférieur à N tel que le point \tilde{y}_l appartient à la droite $\tilde{\alpha}_{i_0}$, ce qui est exclu par définition de k . Par hypothèse de récurrence, le point \tilde{y}_N est après le point \tilde{y}_{k+1} pour l'ordre induit sur la droite $\tilde{\alpha}_j$. Comme les deux segments topologiques

$\tilde{\beta}_0|_{[\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}]}$ et $\tilde{\beta}_0|_{[\tilde{y}_N, \tilde{y}_{N+1}]}$ sont disjoints, on en déduit que le point \tilde{y}_{N+1} est après le point \tilde{y}_k pour l'ordre induit sur la droite $\tilde{\alpha}_{i_0}$. Un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire dans le cas du point \tilde{y}_{-N-1} nous donne la propriété souhaitée au rang $N + 1$. \square

Proposition 3.10. *Si le lacet β est croissant vis-à-vis du lacet α , alors il existe un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ supporté dans un anneau tel que le lacet $f(\beta)$ ne rencontre pas le lacet α .*

Démonstration. Notons c un lacet qui vérifie les conditions locales vis-à-vis des lacets α et β : la proposition précédente nous assure qu'un tel lacet existe. Quitte à le perturber un peu, on peut supposer qu'il est transverse aux lacets α et β . Fixons un relevé $\tilde{\beta}_0$ du lacet β . Notons l_{max} (respectivement l_{min}) l'indice le plus grand (respectivement le plus petit) pour lequel la droite topologique $\tilde{\alpha}_{l_{max}}$ (respectivement $\tilde{\alpha}_{l_{min}}$) rencontre la droite topologique $\tilde{\beta}_0$. Autrement dit, la droite $\tilde{\alpha}_{l_{max}}$ (respectivement $\tilde{\alpha}_{l_{min}}$) est le relevé de α qui intersecte $\tilde{\beta}_0$ qui est le plus à droite (respectivement le plus à gauche). On est alors dans l'un des deux cas suivants :

- l'ensemble $\tilde{\alpha}_{l_{max}} \cap \tilde{B}_{-1}$ ne rencontre pas l'ensemble $\Pi^{-1}(c)$ ou, autrement dit, cet ensemble ne rencontre aucun relevé du lacet c ;
- l'ensemble $\tilde{\alpha}_{l_{min}} \cap \tilde{B}_0$ ne rencontre pas l'ensemble $\Pi^{-1}(c)$ ou, autrement dit, cet ensemble ne rencontre aucun relevé du lacet c .

On va montrer dans ce qui suit que, dans le premier cas ci-dessus, il existe un homéomorphisme h supporté dans le complémentaire d'un voisinage de c tel que, si l'on note \tilde{h} le relevé de l'homéomorphisme h qui fixe $\Pi^{-1}(c)$:

- l'inclusion suivante est vérifiée

$$\left\{ j \in \mathbb{Z}, \tilde{h}(\tilde{\beta}_0) \cap \tilde{\alpha}_j \neq \emptyset \right\} \subset \left\{ j \in \mathbb{Z}, \tilde{\beta}_0 \cap \tilde{\alpha}_j \neq \emptyset \right\} ;$$

- la droite topologique $\tilde{h}(\tilde{\beta}_0)$ ne rencontre pas le relevé $\tilde{\alpha}_{l_{max}}$;
- la courbe $h(\beta)$ est croissante vis-à-vis de α ;
- la courbe c vérifie les conditions locales vis-à-vis des courbes α et β .

On a un énoncé symétrique dans le deuxième cas. Une récurrence sur le cardinal de l'ensemble $\left\{ j \in \mathbb{Z}, \tilde{\beta}_0 \cap \tilde{\alpha}_j \neq \emptyset \right\}$ permet alors de conclure la preuve de la proposition.

Plaçons-nous maintenant dans le cas suivant : l'ensemble $\tilde{\alpha}_{l_{max}} \cap B_{-1}$ ne rencontre pas l'ensemble $\Pi^{-1}(c)$. Montrons l'existence d'un homéomorphisme h vérifiant les propriétés ci-dessus. Notons \tilde{C} l'adhérence d'une composante connexe de $\tilde{\beta}_0 \cap D_{\tilde{\alpha}_{l_{max}}}$, où $D_{\tilde{\alpha}_{l_{max}}}$ désigne l'ensemble des points strictement à droite du relevé $\tilde{\alpha}_{l_{max}}$ du lacet α .

Notons \tilde{x}_i et \tilde{x}_{i+1} les deux extrémités du segment \tilde{C} , où le point \tilde{x}_i est plus petit que le point \tilde{x}_{i+1} pour l'ordre induit sur $\tilde{\beta}_0$, et on note $\Pi(\tilde{x}_j) = x_j$ pour $j = i$ ou $j = i + 1$. Notons \tilde{D} le disque bordé par les segments topologiques \tilde{C} et $\tilde{\alpha}_{[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]}$. Le lemme précédent implique alors que l'intérieur de ce disque ne contient aucun point du relevé $\tilde{\beta}_0$. Par conséquent, tous les points de l'intérieur de ce disque sont à gauche de la droite topologique $\tilde{\beta}_0$. Ainsi, ce disque ne rencontre pas les relevés $\tilde{\beta}_j$ du lacet β , pour $j > 0$. De plus, par définition de l_{max} , ce disque ne rencontre pas les relevés $\tilde{\beta}_j$ du lacet β , pour $j < 0$. On considère alors un homéomorphisme h_1 supporté dans un voisinage U du disque $\Pi(\tilde{D})$ (voisinage suffisamment petit pour que l'ensemble $U \cap \beta$ n'ait qu'une seule composante connexe et que l'ensemble U ne rencontre pas la courbe c) tel que

$h_1(\beta \cap U) \cap \alpha = \emptyset$. Si l'on note \tilde{h}_1 le relevé de l'homéomorphisme h_1 qui est supporté dans $\Pi^{-1}(U)$, l'ensemble $\tilde{h}_1(\tilde{\beta}_0) \cap \Pi^{-1}(U)$ ne rencontre pas la droite topologique $\tilde{\alpha}_{l_{max}}$. En procédant de la même manière pour chaque composante connexe de l'ensemble $\beta_0 \cap D_{\tilde{\alpha}_{l_{max}}}$, on obtient l'homéomorphisme h recherché (par composition d'homéomorphismes à support dans des disques deux à deux disjoints). \square

Corollaire 3.11. *Soit f un homéomorphisme dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{T}^2)$. Supposons qu'il existe un lacet simple α dont l'image par f est croissante vis-à-vis du lacet α . Dans ce cas, on a :*

$$\text{Frag}_{\mathbb{A}}(f) \leq 3.$$

Comme d'autre part, on sait que la norme de fragmentation est bornée par 4 pour les homéomorphismes de l'anneau, on en déduit que la norme de fragmentation est majorée par 12 pour de tels homéomorphismes. De plus, comme la longueur des commutateurs est majorée par deux pour les homéomorphismes de l'anneau (d'après [11]), on en déduit que la longueur des commutateurs est majorée par 6 pour de tels homéomorphismes.

Un cas d'application de la propriété précédente est le suivant :

Proposition 3.12. *Donnons-nous deux lacets simples C^1 transverses isotopes α et β qui sont tous deux positivement transverses à un même feuilletage du tore. Alors le lacet β est croissant vis-à-vis de α .*

Question : Existe-t-il un difféomorphisme f du tore isotope à l'identité tel que, pour tout lacet essentiel α du tore, le lacet $f(\alpha)$ n'est pas croissant vis-à-vis du lacet α ?

Chapter 4

Commutator length of diffeomorphisms of the closed annulus

4.1 Introduction

Let M be a manifold. The *support* $\text{supp}(f)$ of a homeomorphism f of M is defined to be the closure of the set:

$$\{x \in M, f(x) \neq x\}.$$

For r in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, denote by $\text{Diff}_0^r(M)$ the identity component of the group of compactly-supported C^r -diffeomorphism of M . We also write $\text{Homeo}_0(M) = \text{Diff}_0^0(M)$. We study algebraic properties of these groups.

A commutator in $\text{Diff}_0^r(M)$ is an element of the form $[f, g] = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$. It is known that, for $r \neq \dim(M) = \dim(\partial M) + 1$ and $r \neq \dim(M) + 1$ every element in $\text{Diff}_0^r(M)$ can be written as a product of commutators: indeed, a result by Mather (see [9], [39], [40]) shows that, if the manifold M is without boundary, the group $\text{Diff}_0^r(M)$ is perfect if $r \neq \dim(M) + 1$ and the result for manifolds with boundary follows from this one. A question naturally arises: how many commutators shall we need to write a given diffeomorphism as a product of commutators? For an element f in $\text{Diff}_0^r(M)$, the *commutator length* $cl_r(f)$ is the minimal number of commutators needed to write f as a product of commutators. Burago, Ivanov and Polterovich showed in [11] that, when the manifold M is a sphere or compact and three-dimensional without boundary, the commutator length is bounded (by 4 in the case of the sphere and 10 in the case of three-dimensional manifolds). They also exhibited a wide class of open manifolds (that they call portable manifolds), including \mathbb{R}^n , for which the commutator length is bounded by 2. Tsuboi generalized these results for odd-dimensional compact manifolds and gave a better bound: the commutator length is bounded by 6 in those cases.

A homeomorphism f is said to be *supported in a ball* if there exists a topological embedding $i : \mathbb{B} \rightarrow M$ of the closed unit ball \mathbb{B} of the same dimension as M such that $\text{supp}(f) \subset i(\mathbb{B})$ and $i(\mathbb{B}) \cap \partial M$ is homeomorphic to an open cell. Like for commutators, every element f in $\text{Diff}_0^r(M)$ can be written as a product of diffeomorphisms in $\text{Diff}_0^r(M)$ supported in balls and we define $\text{Frag}_r(f)$ to be the minimal number of diffeomorphisms

in such a decomposition. Burago, Ivanov, Polterovich and Tsuboi showed also that the fragmentation norm is bounded in the case of odd-dimensional manifolds and of open portable manifolds.

The commutator length and the fragmentation norm are two examples of the more general notion of conjugation-invariant norm on a group introduced by Burago, Ivanov and Polterovich in [11]. They proved that the fragmentation norm plays a crucial role: every conjugation-invariant norm on $\text{Diff}_0^r(M)$ is bounded if and only if the fragmentation norm is bounded.

In this chapter, we consider the case of the closed annulus \mathbb{A} . We prove some estimates on the commutator length and the fragmentation norm, which imply in particular that they are unbounded, contrarily to the above examples¹. For a diffeomorphism f in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$, let $\rho(f)$ be the difference of the translation numbers of f on the two boundary components (for a precise definition of $\rho(f)$, see the next section). The following theorem shows that ρ is a quasi-isometry from $\text{Diff}_0^r(M)$, endowed with the fragmentation norm or the commutator length, to \mathbb{R} :

Theorem 4.1. *Let r be an integer different from 2 and 3. For any diffeomorphism f in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$,*

$$\left| \frac{|\rho(f)|}{4} - cl_r(f) \right| \leq \frac{47}{4}$$

and

$$|\rho(f) - \text{Frag}_r(f)| \leq 16.$$

In fact, the map ρ is a quasi-morphism (this notion will be defined in the next section) on the group $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ and is essentially the only quasi-morphism on this group:

Theorem 4.2. *If $r \neq 2, 3$, every homogeneous quasi-morphism on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ is colinear to ρ .*

Remark For $r = 2$ or $r = 3$, the result holds if we replace $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ by $[\text{Diff}_0^r(\mathbb{A}), \text{Diff}_0^r(\mathbb{A})]$, the subgroup generated by commutators. Whether the equality $[\text{Diff}_0^3(\mathbb{A}), \text{Diff}_0^3(\mathbb{A})] = \text{Diff}_0^3(\mathbb{A})$ holds or not is still an open question.

In the next section, we state a proposition which give fine estimates on the commutator length. We also show that this proposition implies the first part of Theorem 4.1 and Theorem 4.2. The third section is devoted to the proof of this proposition. In the fourth section, we prove an analogous proposition on the fragmentation norm which implies the second part of Theorem 4.1. Finally, in the last section, we discuss generalizations of these results to other surfaces. We will prove the following result:

Theorem 4.3. *Let M be a surface with non-empty boundary which is different from the disk and r be a number in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Then the group $\text{Diff}_0^r(M)$ admits non-trivial homogeneous quasi-morphisms. In particular, this group is stably unbounded.*

1. Observe in particular that, for a manifold M with interior $\text{int}(M)$, the boundedness of $\text{Diff}_0^r(\partial M)$ and of $\text{Diff}_0^r(\text{int}(M))$ does not necessarily imply that $\text{Diff}_0^r(M)$ is bounded (compare to [1]).

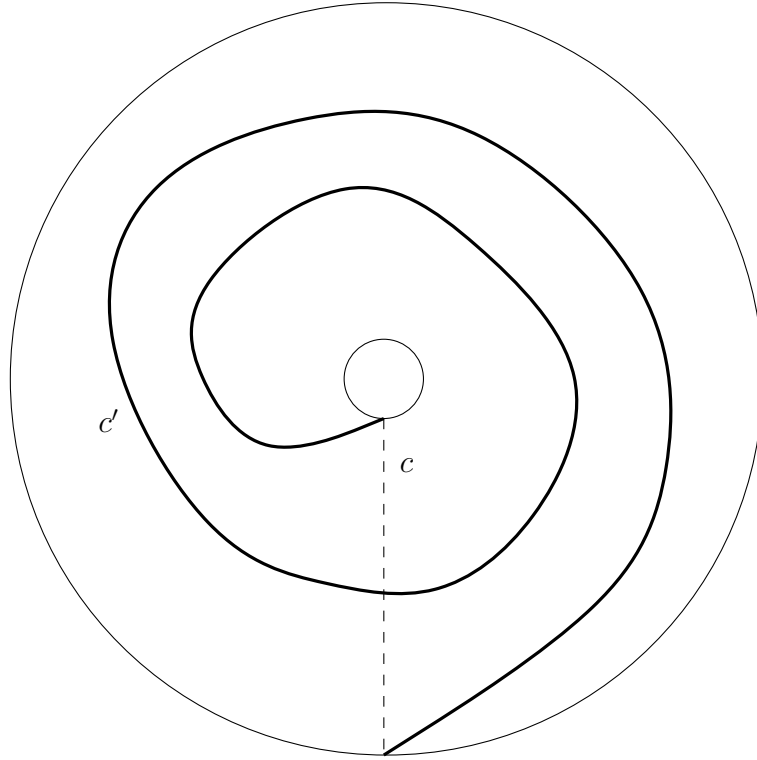


Figure 4.1: A diffeomorphism f which sends the curve c to the curve c' satisfies $\rho(f) = 2$

4.2 Quasimorphisms on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$

Definition 4.1. Given a group G , a homogeneous quasi-morphism on G is a map $q : G \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfies:

1. $\exists D > 0, \forall a, b \in G, |q(ab) - q(a) - q(b)| \leq D.$
2. $\forall a \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, q(a^n) = nq(a).$

The least constant $D(q)$ which satisfies 1) is called the defect of the quasimorphism q . The trivial quasimorphism is the quasimorphism which maps every element of G to 0.

A first connection between commutator length and quasi-morphisms is given by the following classical lemma (see [4] and [12]):

Lemme 4.1. Suppose G is perfect. If G admits a non-trivial homogeneous quasi-morphism q , then cl_G is unbounded. Moreover,

$$\forall g \in G, |q(g)| \leq 2cl_G(g)D(q).$$

Quasi-morphisms on G are in fact more closely related to commutator length via the Bavard duality (see [4] and [12]). A typical example is the *translation number* on the group $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ of homeomorphisms of \mathbb{R} which commute with integral translations (which is also the group of lifts of orientation-preserving homeomorphisms of the circle): for every homeomorphism f in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, the sequence $(\frac{f^n(x)-x}{n})_n$ converges for any x and the limit is independant of the chosen point x . This limit is called the translation

number of f . It actually defines a quasi-morphism on the group $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ (see [27] for more information on the translation number).

We now consider the closed annulus $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$. We build a quasi-morphism on the identity component $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ of the group of homeomorphisms of \mathbb{A} . The following construction is due to Frederic Le Roux. We denote by $\pi : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$ the universal covering of \mathbb{A} . Given a homeomorphism f in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$, consider a lift $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ of f , *i.e.* a homeomorphism of $\mathbb{R} \times [0, 1]$ which satisfies $\pi \circ F = f \circ \pi$. The maps $F_0 = F|_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ and $F_1 = F|_{\mathbb{R} \times \{1\}}$ belong to the group $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$. If we replace F by some other lift $F + k$, then both translation numbers of F_0 and F_1 will increase by k . Thus the difference of the translation numbers of these homeomorphisms is independent of the lift F chosen. We denote this number by $\rho(f)$ and call it the *torsion number*. As the translation number is a homogeneous quasi-morphism on the group $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, ρ is a (nontrivial) homogeneous quasi-morphism on $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ which restricts to a non-trivial quasi-morphism on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ for every r in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

We first reduce Theorem 4.2 to the following proposition, which gives estimates on the commutator length. We denote by E the lower integer part and, for an element f in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$:

$$\alpha(f) = \min_{r \in \mathbb{R}} |F_1(r) - F_0(r)|,$$

where F is a lift of f (note that this quantity is independent of the choice of the lift).

Proposition 4.2. *Let $f \neq \text{Id}_{\mathbb{A}}$ be a homeomorphism in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ and F be a lift of f . Then, for any $r \neq 2, 3$:*

$$E\left(\frac{\alpha(f) + 3}{4}\right) + 9 \geq cl_r(f) \geq E\left(\frac{\alpha(f)}{4}\right) + 1.$$

If $r = 0$, then the 9 appearing in the upper bound may be improved to 5.

This proposition will be established in the next section. Now, we deduce the first part of Theorem 4.1 and Theorem 4.2 from Proposition 4.2.

Proof of the first part of Theorem 4.1. It suffices to show that, for every element f in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$:

$$||\rho(f)| - \alpha(f)| \leq 2.$$

Take a real number r_0 in \mathbb{R} such that $\alpha(f) = |F_1(r_0) - F_0(r_0)|$, where F is a lift of f . We will prove that :

$$|\rho(f) - F_1(r_0) - F_0(r_0)| \leq 2.$$

For every homeomorphisms G and H in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, we have the following classical inequality:

$$\forall r \in \mathbb{R}, |(G(H(r)) - r) - (G(r) - r) - (H(r) - r)| \leq 1.$$

Using this formula, we obtain by induction, for $i \in \{0, 1\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |F_i^n(r_0) - nF_i(r_0) + (n-1)r_0| \leq n-1$$

and $|F_1^n(r_0) - F_0^n(r_0) - n(F_1(r_0) - F_0(r_0))| \leq 2n-2$. Dividing by n and taking the limit $n \rightarrow +\infty$ allows us to conclude the proof. \square

Proof of Theorem 4.2. The strategy of the proof is the same as in the case of the translation number on $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ (see [27]). Let q be a homogeneous quasi-morphism on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$. Let t be a C^∞ -diffeomorphism in $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{A})$ which is a "twist": there exists a lift T of t which satisfies:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} T(x, 0) = (x, 0). \\ T(x, 1) = (x + 1, 1). \end{cases}$$

(For instance, one can take $t(x, r) = (x + r, r)$.) Then $q - q(t)\rho$ is a homogeneous quasi-morphism which vanishes on t and the next lemma allows us to complete the proof of Theorem 4.2. \square

Remark Observe that t fixes the boundary but there is no continuous path of diffeomorphisms fixing the boundary between the identity and t .

Lemma 4.4. *Every homogeneous quasi-morphism on $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ which vanishes on t is trivial, if $r \neq 2, 3$.*

Proof of lemma 4.4. Let q be such a quasi-morphism. Then, for every integer $n \in \mathbb{Z}$ and every homeomorphism f in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$, we have

$$|q(t^n f) - q(f)| \leq D(q).$$

Let us fix f in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ and choose an integer n_0 such that $\alpha(t^{n_0} f) < 1$ (if $\alpha(f) = \min_{r \in \mathbb{R}} (F_1(r) - F_0(r))$, then $\alpha(t^p f) = \alpha(f) + p$ as long as $p > -\alpha(f)$ and the other cases are similar or easier). Then, by proposition 4.2, the homeomorphism $t^{n_0} f$ may be written as a product of at most 9 commutators. Therefore, using lemma 1.2:

$$|q(t^{n_0} f)| \leq 18D(q)$$

and $|q(f)| \leq 19D(q)$. Hence, q is a bounded homogeneous quasimorphism: it is trivial. \square

4.3 Estimation of the commutator length

This section is devoted to the proof of Proposition 4.2. We will first make the proof in the case $r = 0$ and then an approximation argument will give the $r > 0$ case. We will need a theorem by Eisenbud, Hirsch and Neumann on the commutator length for lifts of circle homeomorphisms.

Theorem 4.5. *(Eisenbud-Hirsch-Neumann (see [14] Theorem 2.3))*

A homeomorphism F in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ can be written as a product of n commutators in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ if and only if:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - x| < 2n - 1.$$

4.3.1 Lower bound of the commutator length for $r = 0$

Let f be a homeomorphism in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ with $cl_0(f) = n$. Let F denote a lift of f which can be written as a product of n commutators in the group of lifts of elements in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ namely

$$\{G \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R} \times [0, 1]), \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], G(x+1, t) = G(x, t) + (1, 0)\}.$$

Then F_0 and F_1 , which belong to $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, can be written as a product of n commutators. Using the Eisenbud-Hirsch-Neumann theorem, we get:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} |F_0(x) - x| = |F_0(x_0) - x_0| < 2n - 1$$

and:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} |F_1(x) - x| = |F_1(x_1) - x_1| < 2n - 1.$$

We may assume that: $x_0 < x_1 < x_0 + 1$. These inequalities imply that:

$$\begin{aligned} \alpha(f) &\leq |F_0(x_0) - F_1(x_0)| \\ &\leq |F_0(x_0) - x_0| + |(F_1(x_0) - x_0) - (F_1(x_1) - x_1)| + |F_1(x_1) - x_1| \\ &< (2n - 1) + 2 + (2n - 1) \\ &< 4n \end{aligned}$$

The lower bound in Proposition 4.2 is therefore proved.

4.3.2 Upper bound of the commutator length for $r = 0$

To get an upper bound, we first compose a given homeomorphism by some number of commutators to get a homeomorphism which admits a lift which pointwise fixes the boundary. Then we compose by 2 commutators to get a homeomorphism with a lift which is the identity in a neighbourhood of the boundary. Finally, such a homeomorphism can be written as a product of 2 commutators, by a result by Burago, Ivanov and Polterovich.

Let f be a homeomorphism in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$. Let $k = E(\frac{\alpha(f)+3}{4}) + 1$.

First step: getting a homeomorphism with a lift which fixes pointwise the boundary by composing with k commutators

Up to conjugating by $(x, r) \rightarrow (x, 1 - r)$, we may assume that f is a "positive twist": there exists a lift F of f and a real number x_0 which satisfy $\alpha(f) = F_1(x_0) - F_0(x_0)$.

By composing the lift F by an integral translation if necessary, we may suppose that:

$$2k - 2 \leq F_1(x_0) - x_0 < 2k - 1.$$

Then, as $4k > \alpha(f) + 3$:

$$F_0(x_0) - x_0 = F_1(x_0) - x_0 - \alpha(f) \geq 2k - 2 - \alpha(f) > 1 - 2k.$$

By using the Eisenbud-Hirsch-Neumann theorem, we get that F_1 and F_0 can be written as products of k commutators in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} F_1 = \prod_{i=1}^k [g_{i,1}, h_{i,1}] \\ F_0 = \prod_{i=1}^k [g_{i,0}, h_{i,0}] \end{cases},$$

where the $g_{i,j}$'s and the $h_{i,j}$'s belong to $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$.

For every index i , let us take $G_i : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ (respectively H_i) a lift of an element g_i (respectively h_i) of $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ which satisfies:

$$\begin{cases} p_1 \circ G_i(\cdot, 1) = g_{i,1} \\ p_1 \circ G_i(\cdot, 0) = g_{i,0} \end{cases}$$

(respectively:

$$\begin{cases} p_1 \circ H_i(\cdot, 1) = h_{i,1} \\ p_1 \circ H_i(\cdot, 0) = h_{i,0} \end{cases}).$$

Note that the homeomorphisms H_i and G_i exist because the $g_{i,j}$'s and the $h_{i,j}$'s are isotopic to the identity. Then the homeomorphism $[h_k, g_k] \circ [h_{k-1}, g_{k-1}] \circ \dots \circ [h_1, g_1] \circ f$ admits a lift which pointwise fixes the boundary.

Second step: a homeomorphism with a lift which pointwise fixes the boundary can be written as a product of 4 commutators

Fix a homeomorphism f in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ with a lift F which is the identity on the boundary.

Consider a path $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$ which satisfies the following conditions, where p_1 and p_2 are respectively the first and the second projection of $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ (see figure 4.3.2):

- $c(0) = (-\frac{1}{4}, 0)$ and $c(1) = (\frac{1}{4}, 0)$.
- $\forall t \in (0, 1), 0 < p_2 \circ c(t) < \frac{1}{4}$.
- $\forall t \in [0, 1], p_2 \circ f \circ c(t) < \frac{1}{4}$.
- $\forall t \in [0, 1], p_1 \circ f \circ c(t) \in (-\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.
- $\forall t \in [0, 1], p_1 \circ c(t) \in (-\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.

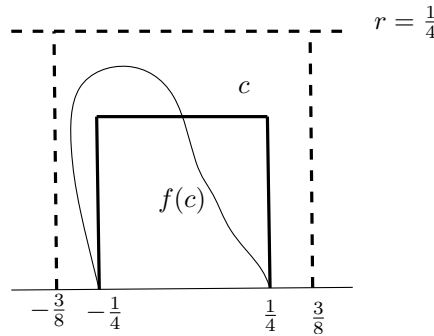


Figure 4.2: Description of the curve c

Let D be the connected component of $\mathbb{A} - ([-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times \{0\} \cup c([0, 1]))$ whose boundary contains the point $(0, 0)$. According to the Schönflies theorem, there exists a homeomorphism $f_{1,0}$ in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ which coincides with f on the closure of D (which is a closed topological disc) and with support included in $(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) \times [0, \frac{1}{2}) = D_{1,0}$. By taking a lace homotopic to the lower boundary component and close to it and applying the Schönflies theorem, we can find a homeomorphism $f_{2,0}$ which coincides with $f_{1,0}^{-1} \circ f$ (which is the identity on D) in a neighbourhood of the lower boundary $\mathbb{R} \times \{0\}$ and which satisfies:

$$\text{supp}(f_{2,0}) \subset (\frac{1}{8}, \frac{7}{8}) \times [0, \frac{1}{2}) = D_{2,0}.$$

With the same technique, we can build homeomorphisms $f_{1,1}$ and $f_{2,1}$ in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ which satisfy:

- the homeomorphism $f_{1,1} \circ f_{2,1}$ coincides with f in a neighbourhood of the upper boundary $\mathbb{R} \times \{1\}$.
- the support of $f_{1,1}$ is included in $(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) \times (\frac{1}{2}, 1] = D_{1,1}$.
- the support of $f_{2,1}$ is included in $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}) \times (\frac{1}{2}, 1] = D_{2,1}$.

Thus, we have $f = f_{1,1} \circ f_{2,1} \circ f_{1,0} \circ f_{2,0}$ near the boundary.

The next lemma is classical. The idea of the proof of this lemma seems to appear for the first time in [2].

Lemma 4.6. *Let \mathbb{H} denote the closed upper half plane. Then every element in $\text{Homeo}_0(\mathbb{H})$ can be written as one commutator.*

Proof. Let h be an element in $\text{Homeo}_0(\mathbb{H})$. Let U be a neighbourhood of $\text{supp}(h)$ and φ be a homeomorphism in $\text{Homeo}_0(\mathbb{H})$ which satisfies the following conditions (see figure 4.3.2):

- the open sets $\varphi^k(U)$, for k in \mathbb{N} , are pairwise disjoint.
- the sequence $(\varphi^k(U))_{k \in \mathbb{N}}$ converges to a singleton $\{p\}$ which lies on the boundary as k tends to $+\infty$.

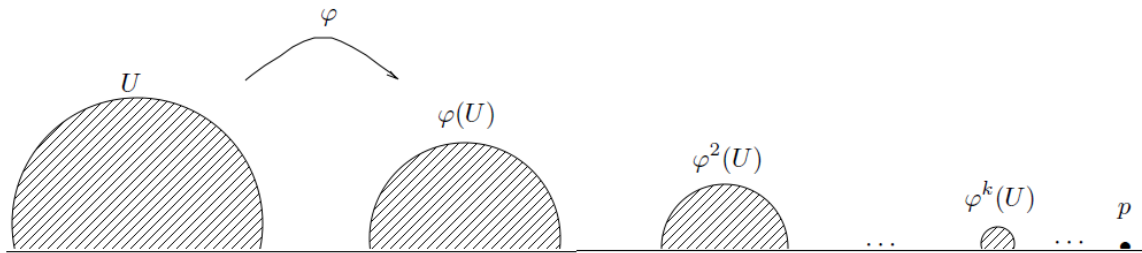


Figure 4.3: Description of the homeomorphism φ

Now, consider the homeomorphism g in $\text{Homeo}_0(\mathbb{H})$ which satisfies:

- $g = Id$ outside $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \varphi^k(U)$.
- for every non-negative integer k , $g|_{\varphi^k(U)} = \varphi^k \circ h \circ \varphi^{-k}$.

Then $h = [g, \varphi]$. □

According to the lemma applied in the discs $D_{i,j}$, each $f_{i,j}$ is a commutator, thus f coincides with a product of 4 commutators in a neighbourhood of the boundary. We will see that we can improve this to 2. Using this last lemma, we may consider homeomorphisms $g_{i,j}$ and $h_{i,j}$ supported in $D_{i,j}$ which satisfy $f_{i,j} = [g_{i,j}, h_{i,j}]$. Note that:

$$\begin{aligned} \text{supp}(g_{i,0}) \cap \text{supp}(g_{i,1}) &= \emptyset, \\ \text{supp}(h_{i,0}) \cap \text{supp}(h_{i,1}) &= \emptyset, \\ \text{supp}(g_{i,0}) \cap \text{supp}(h_{i,1}) &= \emptyset, \\ \text{supp}(h_{i,0}) \cap \text{supp}(g_{i,1}) &= \emptyset, \end{aligned}$$

and

$$\text{supp}(f_{i,0}) \cap \text{supp}(f_{i,1}) = \emptyset.$$

Thus, those pairs of homeomorphisms commute. Therefore:

$$\begin{aligned} g = f_{1,1} \circ f_{2,1} \circ f_{1,0} \circ f_{2,0} &= f_{1,1} \circ f_{1,0} \circ f_{2,1} \circ f_{2,0} \\ &= [g_{1,1}, h_{1,1}] \circ [g_{1,0}, h_{1,0}] \circ [g_{2,1}, h_{2,1}] \circ [g_{2,0}, h_{2,0}] \\ &= [g_{1,1} \circ g_{1,0}, h_{1,1} \circ h_{1,0}] \circ [g_{2,1} \circ g_{2,0}, h_{2,1} \circ h_{2,0}] \end{aligned}$$

Moreover, this homeomorphism coincides with f on a neighbourhood of the boundary. Thus $g^{-1} \circ f$ admits a lift which is the identity near the boundary. As the open annulus is a portable manifold (see [11] Theorem 1.18), the homeomorphism $g^{-1} \circ f$ can be written as a product of two commutators. This ends the proof of Proposition 4.2 in the case $r = 0$.

4.3.3 Case $r > 0$

It follows directly from the result on homeomorphisms that:

$$\forall f \in \text{Diff}_0^r(\mathbb{A}), \quad cl_r(f) \geq cl_0(f) \geq E\left(\frac{\alpha(f)}{4}\right) + 1.$$

To get an upper bound (for $r \neq 2, 3$), the process is the following. We first write a diffeomorphism f as a product of $E(\frac{\alpha(f)+3}{4}) + 5$ commutators of homeomorphisms and we approximate every homeomorphism appearing in this product by a diffeomorphism. Hence, arbitrarily close to f in the C^0 topology, there is a product of $E(\frac{\alpha(f)}{4}) + 5$ commutators of diffeomorphisms. To conclude, it suffices to notice that, for $r \neq 2, 3$, a diffeomorphism sufficiently close to the identity can be written as a product of 4 commutators. Let us show this last fact. We need the following lemma, which is a consequence of a fragmentation lemma proved in the appendix:

Lemma 4.7. *There exists a C^0 neighbourhood Υ of the identity in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ such that:*

$$\forall f \in \Upsilon, \exists f_1, f_2 \in \text{Diff}_0^r(\mathbb{A}), \begin{cases} f = f_1 \circ f_2 \\ \text{supp}(f_1) \subset (-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) \times [0, 1] \\ \text{supp}(f_2) \subset (\frac{1}{8}, \frac{7}{8}) \times [0, 1] \end{cases}.$$

Now, the manifolds $(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) \times [0, 1]$ and $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}) \times [0, 1]$ are portable, in the sense of [11]. It follows from [11] Theorem 1.18 is perfect that, if $r \neq 2, 3$, the diffeomorphisms f_1 and f_2 may be each written as a product of two commutators: the proof of this theorem remains valid for finite regularity except that it uses the fact that the group $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ is perfect, which is true only when $r \neq 2$ and $r \neq 3$.

This concludes the proof in the case $r > 0$.

4.4 Estimation of the fragmentation norm

The analog of Proposition 4.2 for the fragmentation norm is the following proposition, which implies the second part of Theorem 4.1:

Proposition 4.3. *Let f be a homeomorphism in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{A})$ and $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ be a lift of f . Suppose $f \neq \text{Id}$. Then, for any r in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$:*

$$E(\alpha(f)) + 16 \geq \text{Frag}_r(f) \geq E(\alpha(f)) + 1.$$

If $r = 0$, then the 16 appearing in the upper bound may be improved to 12.

To make estimates on the fragmentation norm for the closed annulus, we need an analog of the Eisenbud-Hirsch-Neumann theorem.

4.4.1 Fragmentation norm on $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$

Let A be the subset of $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ given by elements which fix pointwise a nonempty open interval. This subset generates $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ as a group. If F is a homeomorphism in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, we denote $\text{Frag}(F)$ the minimal number of elements of A necessary to write F as a product of elements of A . The analog of the Eisenbud-Hirsch-Neumann theorem for the fragmentation norm is the following:

Proposition 4.4. *Let F be a homeomorphism in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$. Then, for any $k \geq 0$:*

$$\text{Frag}(F) \leq k + 2 \iff \min_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - x| < k + 1.$$

Proof. Let us start with the direct implication. Write:

$$F = F_1 F_2 \dots F_{k+1} F_{k+2},$$

where each F_i belongs to A . Take a point x_0 such that $F_{k+2}(x_0) = x_0$. We have, for every integer $i \in [1, k+1]$:

$$|F_i F_{i+1} \dots F_{k+1} F_{k+2}(x_0) - F_{i+1} \dots F_{k+1} F_{k+2}(x_0)| < 1$$

and by summing these inequalities:

$$|F(x_0) - x_0| < k + 1.$$

This proves the direct implication. Let us show the converse by induction on k . For $k = 0$, up to replacing F by F^{-1} , we may assume:

$$0 \leq \min_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - x| = F(x_0) - x_0 < 1.$$

Choose a point x_1 such that $F(x_0) < x_1 < x_0 + 1$. Then $F(x_0) < F(x_1) < F(x_0) + 1$ and we can find a homeomorphism h in $\text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ which fixes a neighbourhood of $F(x_0)$ and satisfies $h \circ F = \text{Id}$ in a neighbourhood of x_1 . The decomposition $F = h^{-1} \circ (h \circ F)$ shows that $\text{Frag}(F) \leq 2$.

Suppose the converse holds for an integer k . Let us prove it for the integer $k + 1$. Suppose $\min_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - x| < k + 2$. We may also suppose that $\min_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - x| \geq k + 1$ (otherwise, we can conclude directly from the induction hypothesis). As usual, we may assume:

$$k + 1 \leq \min_{x \in \mathbb{R}} (F(x) - x) < k + 2.$$

Let x_0 be a point which satisfies:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (F(x) - x) = F(x_0) - x_0.$$

The same way as for the initialization, we can find a point $x_1 \in (x_0, x_0 + 1)$ such that $F(x_0) < x_1 + k + 1 < F(x_0) + 1$. Then $F(x_0) < F(x_1) < F(x_0) + 1$. Therefore, there exists a homeomorphism h which fixes a neighbourhood of $F(x_0)$ and which satisfies:

$$h(F(x_1)) < x_1 + k + 1.$$

The induction hypothesis allows then us to finish the induction and the proof of Proposition 4.4. \square

4.4.2 Proof of Proposition 4.3

The technique is exactly the same as in the proof of Proposition 4.2, using Proposition 4.4 instead of the Eisenbud-Hirsch-Neumann theorem. Thus the explanations will be briefer.

Lower bound for the fragmentation norm

Let f be an element in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ with $\text{Frag}_0(f) \geq 1$ and F be a lift of f . Fix a decomposition of f as a product of $\text{Frag}_0(f)$ homeomorphisms supported in discs. Let k_0 (respectively k_1) be the number of homeomorphisms appearing in this decomposition whose support meets the lower boundary $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ (resp. the upper boundary $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{1\}$) of \mathbb{A} . Note that $k_0 + k_1 \leq \text{Frag}_0(f)$ as a disc doesn't touch both components of the boundary, by definition. First, suppose $k_0 \geq 2$ and $k_1 \geq 2$. By Proposition 4.4, there exist points x_0 and x_1 in \mathbb{R} such that:

$$|F_0(x_0) - x_0| < k_0 - 1$$

and:

$$|F_1(x_1) - x_1| < k_1 - 1.$$

From these inequalities, we get:

$$\alpha(f) < k_0 - 1 + 1 + k_1 - 1 \leq \text{Frag}_0(f),$$

which gives the lower bound in Proposition 4.3. In the cases $k_0 = 1$ and $k_1 \geq 2$ or $k_1 = 1$ and $k_0 \geq 2$, one of the inequalities

$$|F_0(x_0) - x_0| \leq k_0 - 1$$

and

$$|F_1(x_1) - x_1| \leq k_1 - 1$$

is indeed strict, which allows us to conclude.

In the case $k_0 = 0$ and $k_1 \geq 2$ (the case $k_1 = 0$ and $k_0 \geq 2$ is symmetric), we have, as $F_0 = Id$:

$$\alpha(f) < |F_1(x_1) - x_1| + 1 \leq k_1 \leq \text{Frag}_0(f).$$

In the case $(k_0, k_1) = (1, 1)$, we have $\alpha(f) < 1$ and $\text{Frag}_0(f) \geq 2$ so the inequality $\alpha(f) < \text{Frag}_0(f)$ holds.

In the cases $(k_0, k_1) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$, we have $\alpha(f) = 0$ so the inequality $\alpha(f) < \text{Frag}_0(f)$ holds.

Upper bound for the fragmentation norm

Let f be an element in $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ with lift F . As usual, we may assume: $\alpha(f) = p_1 \circ F(x_0, 1) - p_1 \circ F(x_0, 0)$. Consider a lift of f which satisfies:

$$-1 < F_0(x_0) - x_0 \leq 0.$$

Then $F_1(x_0) - x_0 = F_0(x_0) - x_0 + \alpha(f) < E(\alpha(f)) + 1$. Using Proposition 4.4, we can see that, after composing by at most $E(\alpha(f)) + 2$ homeomorphisms supported in discs which touch the upper boundary, we get a homeomorphism with a lift which fixes the upper boundary and, by composing by two more homeomorphisms supported in discs we get a homeomorphism with a lift which fixes both boundary components. Then, by composing by four homeomorphisms supported in discs, we get a homeomorphism with a lift which fixes a neighbourhood of the boundary. Finally, by proposition 2.1, such a homeomorphism may be written as a product of 4 homeomorphisms supported in discs.

Then, an approximation argument using proposition B.1 combined with the fragmentation lemma yields the case $r > 0$.

4.5 Generalization to other surfaces

A similar construction as the one made in section 2 can be carried out on every compact surface M with boundary to obtain quasi-morphisms. However, in those cases,

we do not know the dimension of the space of quasi-morphism: we just have a lower bound of it.

4.5.1 Case of open surfaces

Suppose M is a non-compact surface with p boundary components which are circles. Let us fix such a boundary component of M : C_1 . Take a path homeomorphic to the half-line which begins on C_1 , goes to infinity, and touches the boundary component C_1 only at endpoint. Consider the cyclic covering $p : \tilde{M} \rightarrow M$ associated to this path. Now, a homeomorphism f in $\text{Homeo}_0(M)$ admits a unique lift $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ which is supported in $p^{-1}(\text{supp}(f))$. The translation number of the restriction of F to $p^{-1}(C_1)$ gives rise to a quasi-morphism. With this method, p independent quasi-morphisms can be built. Moreover, if the commutator length is bounded on the group $\text{Diff}_0^r(\text{int}(M))$, where $\text{int}(M)$ denotes $M - \partial M$, then it can be shown with the same techniques as in the case of the annulus that the vector space of homogeneous quasi-morphisms is p -dimensional. As in the case of the closed annulus, this is a consequence of an estimation of the commutator length. Take a homeomorphism f . First use the Eisenbud-Hirsch-Neumann to get a homeomorphism with a lift which fixes the boundary components after a composition by a number of commutators proportional to the sum of the values of these quasi-morphisms at f . Then, by composing this homeomorphism by a bounded number of commutators (depending only on the number of boundary components), we can get a homeomorphism in $\text{Diff}_0^r(\text{int}(M))$. Finally, we have to use the fact that the commutator length is bounded on this latter group to conclude. In particular, the vector space of homogeneous quasi-morphism is one-dimensional in the case of the half-open annulus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1)$. However, it is not known whether the commutator length is bounded or not on the group $\text{Diff}_0^r(\text{int}(M))$ when $\text{int}(M)$ is different from the open annulus or from \mathbb{R}^2 .

4.5.2 Case of other compact oriented surfaces with boundary

When M is a compact oriented surface with boundary which is different from the closed disc or the closed annulus, its universal covering \tilde{M} may be seen as a subspace of the Poincaré disc \mathbb{D} . We endow M and \mathbb{D} with riemannian metrics of constant curvature -1 such that M has a geodesic boundary and the projection $\tilde{M} \rightarrow M$ is a riemannian covering. Denote by d the associated distance. Given two points x and y on \mathbb{D} and an oriented geodesic g which contains both x and y , we define $a(x, y, g) = d(x, y)$ if the geodesic from x to y has the same orientation as g and $a(x, y, g) = -d(x, y)$ otherwise.

Let us take a homeomorphism f in $\text{Homeo}_0(M)$. The homeomorphism f admits a canonical lift $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ which is the identity on the limit set of \tilde{M} at infinity. Given a point x on the boundary component C of \tilde{M} , which is a geodesic, define:

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a(x, F^n(x), C)}{n} \right).$$

This number is the translation number of F restricted to C and does not depend on

the point x chosen on C . With this construction, we can build p independent quasi-morphisms, where p is equal to the number of boundary component of M . Here also, the vector space of quasi-morphisms on $\text{Diff}_0^r(M)$ is p -dimensional if the commutator length on $\text{Diff}_0^r(\text{int}(M))$ is bounded.

Deuxième partie

Éléments de distorsion dans les groupes d'homéomorphismes et de difféomorphismes

Sommaire

5	Éléments de distorsion de $\text{Diff}_0^\infty(M)$	63
5.1	Énoncé des résultats	63
5.2	Résultat	63
5.3	Démonstration du théorème	64
5.4	Démonstration du lemme	65
5.5	Démonstration du deuxième lemme	66
6	Éléments de distorsion des homéomorphismes de surfaces	70
6.1	Introduction	70
6.2	Notations et résultats	70
6.3	Quasi-isométries	74
6.4	Distorsion et fragmentation sur les variétés	80
6.5	Cas des surfaces à bord	89
6.6	Cas du tore	97
6.7	Cas des surfaces de genre $g \geq 2$	103
6.7.1	Quelques lemmes combinatoires	104
6.7.2	Preuve du lemme 6.29	109
6.7.3	Preuve du lemme 6.30	120
6.7.4	Preuve des lemmes combinatoires	122
6.8	Des éléments de distorsion de croissance d'orbite rapide	126
6.9	Généralisation des résultats	134

Chapitre 5

Éléments de distorsion de $\text{Diff}_0^\infty(M)$

5.1 Énoncé des résultats

L'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes non-conservatifs d'une variété trouve son origine dans une question de Franks et Handel (voir [24] et [23]) : une rotation du cercle est-elle distordue dans le groupe des homéomorphismes du cercle ou des difféomorphismes du cercle ? Qu'en est-il si l'on remplace le cercle par la sphère de dimension 2 ?

La réponse à ces questions est fournie par Calegari et Freedman dans [13] : une rotation du cercle est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 du cercle. Cependant, les auteurs précisent ne pas savoir s'il en est de même en régularité C^∞ . Dans le même article, ils prouvent qu'une rotation de la sphère S^2 est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère. Enfin, en ce qui concerne la régularité C^0 , Calegari et Freedman ont prouvé un résultat très général : en toute dimension N , un homéomorphisme h de la sphère S^N est distordu.

Dans un article ultérieur, Avila a montré que, dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞ , tout élément récurrent est distordu. Nous généralisons dans ce chapitre le résultat d'Avila à toute variété.

5.2 Résultat

Avant toute chose, commençons par introduire des définitions et des notations qui nous seront utiles par la suite.

Définition 5.1. Soit G un groupe. Pour une partie finie S de G , si un élément g de G est dans le groupe engendré par S , on note :

$$l_S(g) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}, \exists (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{\pm 1\}^n, \exists (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in S^n, g = \prod_{i=1}^n s_i^{\epsilon_i} \right\}.$$

Un élément g de G est dit *distordu* (ou de distorsion) s'il existe une partie finie S de G telle que g appartient au groupe engendré par S et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0.$$

On remarque que, comme la suite $(l_S(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, il suffit de montrer que :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0$$

pour obtenir que l'élément g est distordu.

Etant donnée une variété différentiable M , on note :

- $\text{Homeo}_0(M)$ l'ensemble des homéomorphismes à support compact dans M isotopes à l'identité par une isotopie à support compact ;
- pour un élément r de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\text{Diff}_0^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^r isotopes à l'identité par une isotopie à support compact (en particulier, $\text{Homeo}_0(M) = \text{Diff}_0^0(M)$).

Le *support* d'un homéomorphisme f de M est ici défini par :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in M, f(x) \neq x\}}.$$

Si f et g sont deux éléments de $\text{Diff}_0^r(M)$, on note d_r une distance qui définit la topologie de $\text{Diff}_0^r(M)$.

Définition 5.2. On dit qu'un difféomorphisme f de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est *récurrent* si et seulement si :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d_\infty(f^n, \text{Id}_M) = 0.$$

L'objet de la présente note est de démontrer les théorèmes suivants. Ce premier théorème généralise le résultat d'Avila pour les difféomorphismes du cercle (voir [3]).

Théorème 5.1. Si M est une variété compacte, tout élément récurrent de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est *distordu*.

Comme dans [3], la méthode employée permet de démontrer que toute suite d'éléments récurrents $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est simultanément distordue, au sens où l'on peut trouver un ensemble fini S tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \liminf_{p \rightarrow +\infty} \frac{l_S(f_n^p)}{p} = 0.$$

5.3 Démonstration du théorème

La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur une généralisation des résultats de [3] à toute variété. La démarche et les notations sont similaires à celles présentées dans

[3] mais la généralisation de la méthode aux dimensions supérieures nécessite de manière cruciale des résultats de perfection locale qui proviennent de [30]. On ne démontrera le théorème 1 que dans le cas d'une variété M de dimension supérieure ou égale à 2. Le cas de la dimension 1 est traité dans [3].

Les théorèmes vont découler des lemmes suivants.

Lemme 5.2. *Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 2. Il existe des suites $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que, toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_\infty(h_n, Id_M) < \epsilon_n,$$

vérifie la propriété suivante : il existe un ensemble fini $S \subset \text{Diff}_0^\infty(M)$ tel que, pour tout entier n ,

- le difféomorphisme h_n appartient au sous-groupe engendré par S .*
- on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.*

Admettons pour l'instant ce lemme, qui sera démontré dans la section suivante, et démontrons le théorème.

Démonstration du théorème. Soit f un élément récurrent de $\text{Diff}_0^\infty(M)$. Considérons une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{p(n)} = 0 \\ d_\infty(f^{p(n)}, Id_M) \leq \epsilon_n \end{cases},$$

où les suites $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont données par le lemme 1. Ce même lemme appliqué à la suite $(f^{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ nous donne l'existence d'un ensemble fini S qui montre que f est distordu. Le théorème 2 se montre de la même manière, en utilisant le lemme 2. \square

5.4 Démonstration du lemme

Pour mener à bien la démonstration de ces lemmes, nous aurons besoin des lemmes suivants, qui seront démontrés dans la section suivante et portent sur les difféomorphismes de \mathbb{R}^n . Le lemme 5.3 est un analogue du lemme 5.2 dans le cas des commutateurs de difféomorphismes de \mathbb{R}^N . Notons $B(0, 2)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2. Si f et g sont des difféomorphismes de \mathbb{R}^n , on note $[f, g]$ le difféomorphisme $fgf^{-1}g^{-1}$.

Lemme 5.3. *Soient N un entier naturel et r un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Il existe des suites $(\epsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant la propriété suivante. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans la boule $B(0, 2)$ telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_r([f_n, g_n], Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_n.$$

Alors il existe un ensemble fini S' inclus dans $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout entier n , le difféomorphisme $[f_n, g_n]$ appartient au groupe engendré par S' et $l_{S'}([f_n, g_n]) \leq k'_n$.

Démonstration du lemme 5.2. On note N la dimension de M ($N \geq 2$). On considère un recouvrement ouvert $(U_i)_{0 \leq i \leq p}$ de M constitué d'ouverts difféomorphes à \mathbb{R}^N dont l'adhérence est incluse dans un ouvert de carte de M . Pour tout entier i entre 0 et p , on choisit φ_i une carte de M définie sur un voisinage de l'adhérence de U_i qui vérifie :

$$\varphi_i(U_i) \subset B(0, 2).$$

Notons ψ une bijection de $\mathbb{N} \times \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, 4N\}$ sur \mathbb{N} .

On va maintenant construire la suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recherchée à l'aide de la suite $(\epsilon'_l)_{l \in \mathbb{N}}$ donnée par le lemme 3 dans le cas $r = +\infty$.

D'après le lemme de perfection lisse (voir appendice), pour tout entier naturel n , on peut choisir ϵ_n suffisamment petit de sorte que, si un difféomorphisme h de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ vérifie $d(h, Id_M) < \epsilon_n$, alors il existe deux familles $(f_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3N}$ et $(g_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3N}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$, où $g_{k,l}$ et $f_{k,l}$ sont supportés dans l'ouvert U_k telles que :

$$\begin{cases} h = \prod_{k=0}^p \prod_{l=1}^{3N} [f_{k,l}, g_{k,l}] \\ \forall k, l \in [0, p] \times [1, 3N], d_\infty(\varphi_k \circ f_{k,l} \circ \varphi_k^{-1}, Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_{\psi(n,k,l)} \\ \forall k, l \in [0, p] \times [1, 3N], d_\infty(\varphi_k \circ g_{k,l} \circ \varphi_k^{-1}, Id_{\mathbb{R}^N}) < \epsilon'_{\psi(n,k,l)} \end{cases}$$

Donnons-nous une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_\infty(h_n, Id_M) < \epsilon_n.$$

La définition des ϵ_n nous donne deux familles $(\tilde{f}_{n,k,l})$ et $(\tilde{g}_{n,k,l})$ associées à h_n . On pose alors :

$$\begin{aligned} f_{\psi(n,k,l)} &= \varphi_k \circ \tilde{f}_{n,k,l} \circ \varphi_k^{-1} \\ g_{\psi(n,k,l)} &= \varphi_k \circ \tilde{g}_{n,k,l} \circ \varphi_k^{-1} \end{aligned}$$

et on applique le lemme 3 aux suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenues, ce qui achève la démonstration du lemme 1 en posant :

$$k_n = \sum_{k,l} k'_{\psi(n,k,l)}.$$

□

5.5 Démonstration du deuxième lemme

Là encore, elle suit la même méthode que celle présentée dans [3].

Démonstration du lemme 5.3. On note F_1 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie :

$$\forall x \in B(0, 2), F_1(x) = \lambda x,$$

avec $0 < \lambda < 1$.

Soit F_2 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans $B(0, 2)$ qui vérifie :

$$\forall x \in B(0, 1), F_2(x) = x + a,$$

où a appartient à $\mathbb{R}^N - \{0\}$ et est de norme strictement inférieure à 1.

Soit F_3 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support inclus dans $B(0, 2)$ qui vérifie :

- la suite $(F_3^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.
- la suite $(F_3^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Considérons une suite d'entiers $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissant suffisamment vite pour que :

- $n \neq n' \Rightarrow F_3^n F_1^{l_n}(B(0, 2)) \cap F_3^{n'} F_1^{l_{n'}}(B(0, 2)) = \emptyset$.
- le diamètre de $F_3^n F_1^{l_n}(B(0, 2))$ converge vers 0.

On note $F_n = F_3^n F_1^{l_n}$, $U_n = F_3^n F_1^{l_n}(B(0, 2))$ et $\hat{F}_n = F_n F_2 F_n^{-1}$.

On considère pour chaque entier n un ouvert V_n qui vérifie :

- $F_3^n(0) \in V_n \subset U_n$.
- $\hat{F}_n(V_n) \cap V_n = \emptyset$.

On considère aussi une suite d'entiers $(\tilde{l}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que :

$$F_3^n F_1^{\tilde{l}_n}(B(0, 2)) \subset V_n$$

et on note $\tilde{F}_n = F_3^n F_1^{\tilde{l}_n}$.

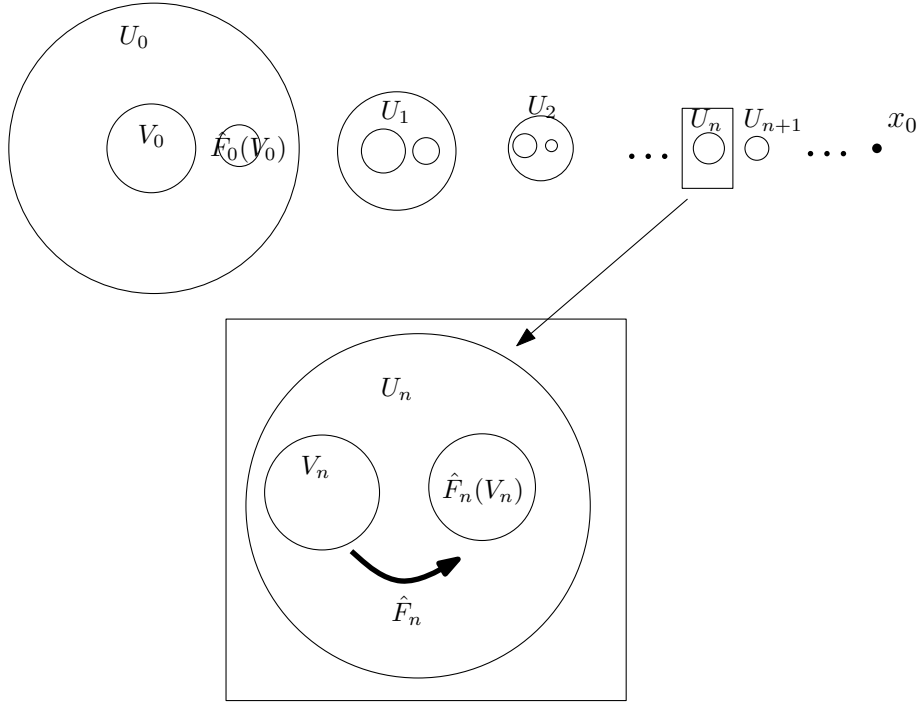


FIGURE 5.1 – Notations

Donnons-nous des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(0, 2)$ et choisissons la suite $(\epsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant suffisamment vite vers 0 de sorte que, si $d_r(f_n, Id) < \epsilon'_n$ et $d_r(g_n, Id) < \epsilon'_n$ pour tout entier n , alors les applications $F_4, F_5 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ définies par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, F_{4|V_n} &= \tilde{F}_n f_n \tilde{F}_n^{-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{5|V_n} &= \tilde{F}_n g_n \tilde{F}_n^{-1} \\ F_{4|\mathbb{R}^N - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} &= F_{5|\mathbb{R}^N - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} = Id_{\mathbb{R}^N - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} \end{aligned}$$

sont de classe C^r en x_0 (et ce sont alors des C^r -difféomorphismes de M à support inclus dans $B(0, 2)$ isotopes à l'identité).

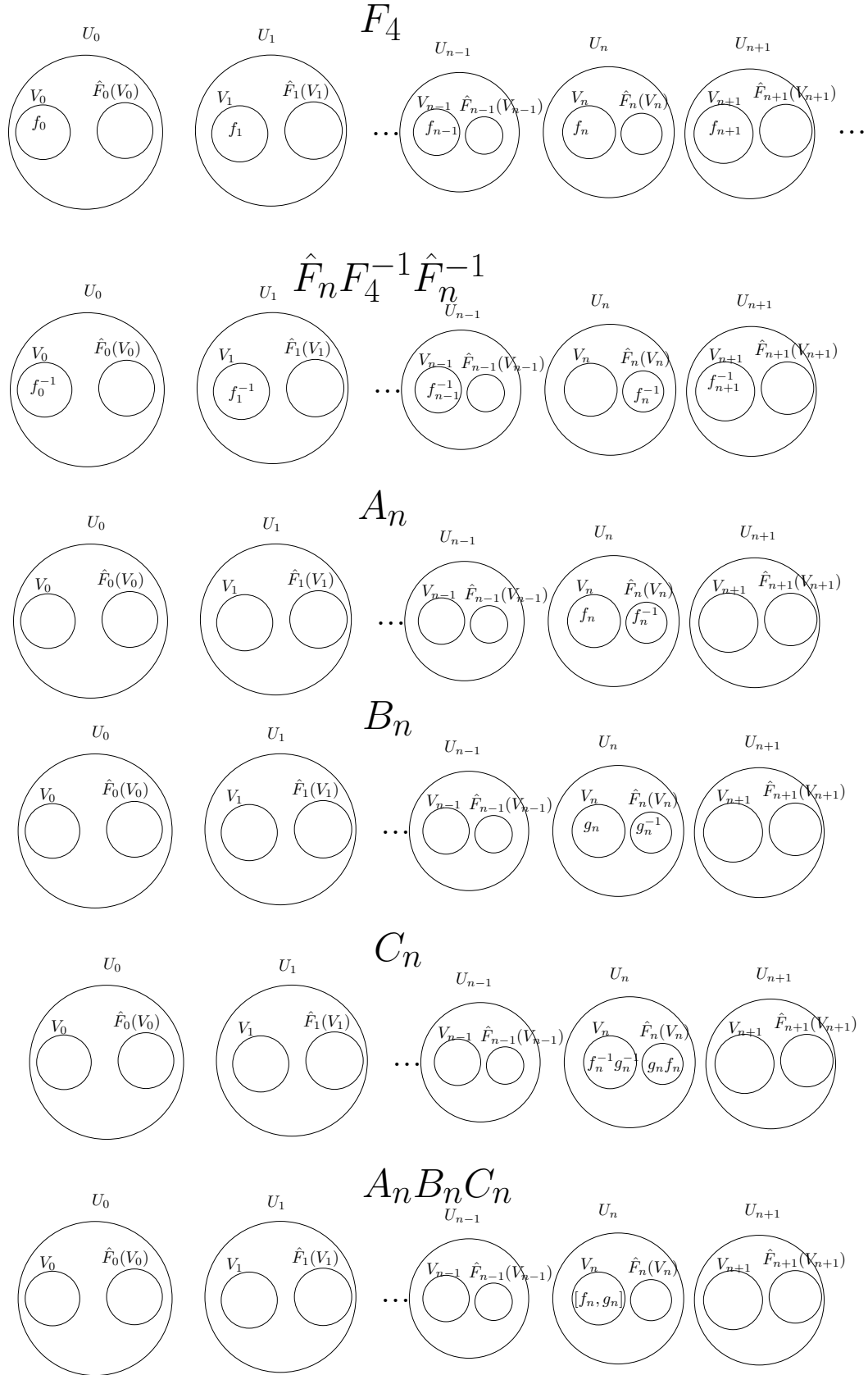


FIGURE 5.2 – Les différents difféomorphismes qui apparaissent dans la preuve

Remarquons que

$$A_n = F_4 \hat{F}_n F_4^{-1} \hat{F}_n^{-1}$$

est à support dans $V_n \cup \hat{F}_n(V_n)$, vaut $\tilde{F}_n f_n \tilde{F}_n^{-1}$ sur V_n et $\hat{F}_n \tilde{F}_n f_n^{-1} \tilde{F}_n^{-1} \hat{F}_n^{-1}$ sur $\hat{F}_n(V_n)$. On peut faire une remarque analogue pour les applications $B_n = F_5 \hat{F}_n F_5^{-1} \hat{F}_n^{-1}$ et $C_n = F_4^{-1} F_5^{-1} \hat{F}_n F_5 F_4 \hat{F}_n^{-1}$. On a alors :

$$A_n B_n C_n = \tilde{F}_n [f_n, g_n] \tilde{F}_n^{-1}.$$

Ainsi :

$$[f_n, g_n] = \tilde{F}_n^{-1} A_n B_n C_n \tilde{F}_n.$$

En prenant $S = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$, on obtient le résultat escompté. \square

Chapitre 6

Éléments de distorsion des homéomorphismes de surfaces

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va tenter de caractériser géométriquement l'ensemble des éléments de distorsion du groupe des homéomorphismes isotopes à l'identité d'une surface compacte. La description que nous allons obtenir va provenir d'un résultat valable sur toute variété qui relie la notion d'élément de distorsion avec la fragmentation, c'est-à-dire la manière de décomposer un homéomorphisme en tant que produit d'homéomorphismes supportés dans des disques : c'est l'objet de la quatrième section de ce chapitre. Le théorème que l'on obtient alors a un inconvénient majeur : il fait intervenir une longueur de fragmentation que l'on comprend mal à part dans le cas des sphères où cette dernière est bornée. Nous allons alors chercher à relier cette longueur de fragmentation à une quantité plus géométrique : le diamètre de l'image d'un domaine fondamental par l'action d'un relevé de l'homéomorphisme que l'on considère. Il n'est pas très difficile de montrer que cette dernière quantité est dominée par la longueur de fragmentation : nous le verrons dans la section 3 de ce chapitre. Par contre, il est plus difficile de montrer que, réciproquement, la longueur de fragmentation est dominée par cette dernière quantité. Pour montrer cette dernière propriété, nous distinguerons le cas des surfaces à bord (section 5) qui est le plus facile, le cas du tore (section 6) et le cas des surfaces compactes sans bord de genre supérieur (section 7). Enfin, la dernière section de ce chapitre donne un exemple d'éléments de distorsion du groupe des homéomorphismes de l'anneau pour lequel la croissance du diamètre d'un domaine fondamental est « rapide ».

6.2 Notations et résultats

Soit M une variété, éventuellement à bord. On note $\text{Homeo}_0(M)$ (respectivement $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$) la composante connexe de l'identité du groupe des homéomorphismes à support compact de M (respectivement du groupe des homéomorphismes de M qui valent l'identité près du bord ∂M de M). Pour deux homéomorphismes f et g de M

et pour une partie A de S , une isotopie entre f et g relativement à A est un chemin continu d'homéomorphismes $(f_t)_{t \in [0,1]}$ qui valent l'identité sur un voisinage de A tel que $f_0 = f$ et $f_1 = g$. Si A est vide, on parle d'isotopie entre f et g .

Dans ce qui suit, S désigne une surface compacte orientable éventuellement à bord, distincte du disque et de la sphère. On note $\Pi : \tilde{S} \rightarrow S$ le revêtement universel de S . La surface \tilde{S} est vue comme sous-ensemble du plan euclidien \mathbb{R}^2 ou du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 de sorte que les automorphismes de revêtement sont des isométries pour la métrique euclidienne ou hyperbolique. On munit la surface \tilde{S} de cette métrique. Dans la suite, on identifiera le groupe fondamental $\Pi_1(S)$ de la surface S au groupe des automorphismes du revêtement $\Pi : \tilde{S} \rightarrow S$. Si A est un sous-ensemble du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 (respectivement du plan euclidien \mathbb{R}^2), on note $\delta(A)$ le diamètre de A pour la distance hyperbolique (respectivement euclidienne). Pour un homéomorphisme f de S , on appelle relevé de f tout homéomorphisme F de \tilde{S} qui vérifie $\Pi \circ F = f \circ \Pi$. Pour une isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$, on appelle relevé de $(f_t)_{t \in [0,1]}$ un chemin continu $(F_t)_{t \in [0,1]}$ d'homéomorphismes de \tilde{S} de sorte que, à tout instant t , l'homéomorphisme F_t est un relevé de l'homéomorphisme f_t . Pour un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$, on note \tilde{f} un relevé de f obtenu en tant que temps 1 du relevé d'une isotopie entre l'identité et f qui vaut l'identité au temps 0. Si de plus le bord de S est non-vide et l'homéomorphisme f est un élément de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$, \tilde{f} est obtenu en relevant une isotopie relativement au bord ∂S . S'il existe un disque D plongé dans la surface S qui contient le support de l'homéomorphisme f , on impose de plus que le support de l'homéomorphisme \tilde{f} soit inclus dans $\Pi^{-1}(D)$. Notons que l'homéomorphisme \tilde{f} est unique sauf dans les cas des groupes $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et $\text{Homeo}_0([0,1] \times \mathbb{S}^1)$.

Définition 6.1. *On appelle domaine fondamental de S toute partie compacte connexe D de \tilde{S} qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

- $\Pi(D) = S$;
- pour tout automorphisme γ dans $\Pi_1(S)$ distinct de l'identité, l'intérieur de D est disjoint de l'intérieur de $\gamma(D)$.

Le théorème principal de cette partie est une réciproque partielle de la propriété suivante (observée par Franks et Handel dans [24], lemme 6.1) :

Proposition 6.1. *Notons D , un domaine fondamental de \tilde{S} pour l'action de $\Pi_1(S)$. Si un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$) est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$), alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(\tilde{f}^n(D))}{n} = 0.$$

Remarque Dans le cas où la surface considérée est le tore \mathbb{T}^2 ou l'anneau $[0,1] \times \mathbb{S}^1$, la conclusion de la proposition revient à dire que l'ensemble de rotation de f est réduit à un point.

Démonstration. Soit f un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$). Notons $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ une partie finie de $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$) telle que :

- l'homéomorphisme f appartient au groupe engendré par \mathcal{G} .
- la suite $(\frac{l_{\mathcal{G}}(f^n)}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0.

On a donc une décomposition de la forme :

$$f^n = g_{i_1} \circ g_{i_2} \circ \dots \circ g_{i_{l_n}}$$

où $l_n = l_{\mathcal{G}}(f^n)$. Ceci implique l'égalité suivante :

$$I \circ \tilde{f}^n = \tilde{g}_{i_1} \circ \tilde{g}_{i_2} \circ \dots \circ \tilde{g}_{i_{l_n}}$$

où I est une isométrie de \tilde{S} . Notons $M = \max_{1 \leq i \leq p, x \in \tilde{S}} d(x, \tilde{g}_i(x))$. Alors , pour deux points x et y du domaine fondamental D , on a :

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) &= d(I \circ \tilde{f}^n(x), I \circ \tilde{f}^n(y)) \\ &\leq d(I \circ \tilde{f}^n(x), x) + d(x, y) + d(I \circ \tilde{f}^n(y), y) \\ &\leq l_n M + \delta(D) + l_n M \end{aligned}$$

d'où le résultat, par sous-linéarité de la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Le théorème principal de cette partie s'énonce ainsi :

Théorème 6.2. *Soit f un homéomorphisme de $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$). Si :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(\tilde{f}^n(D)) \log(\delta(\tilde{f}^n(D)))}{n} = 0,$$

alors f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$).

Remarque L'hypothèse de ce théorème peut être reformulée en termes entièrement topologiques, comme nous le verrons par la suite. De plus, l'hypothèse du théorème est indépendante du domaine fondamental D choisi, ce qui montre du même coup que cette hypothèse est invariante par conjugaison.

La démonstration de ce théorème va occuper les cinq sections suivantes de cette partie. Pour la mener à bien, nous avons besoin d'introduire une notion.

Notons M une variété compacte de dimension d . On appellera boule fermée de M l'image de la boule unité fermée par un plongement de \mathbb{R}^d dans la variété M . Notons :

$$H^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^N, x_1 \geq 0\}.$$

On appelle demi-boule fermée de M l'image de $B(0, 1) \cap H^d$ par un plongement $p : H^d \rightarrow M$ tel que :

$$p(\partial H^d) = p(H^d) \cap \partial M.$$

Fixons une famille finie \mathcal{U} de boules fermées ou de demi-boules fermées dont les intérieurs recouvrent M . Alors d'après le lemme de fragmentation (voir [22] ou [9]), il existe une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'homéomorphismes dans $\text{Homeo}_0(M)$, chacun à support inclus dans l'un des ensembles de \mathcal{U} , telle que :

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n.$$

On note $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f)$ l'entier n minimal dans une décomposition comme ci-dessus : c'est le nombre minimal de facteurs nécessaires pour écrire f en tant que produit (c'est-à-dire composé) d'homéomorphismes supportés dans l'une des boules de \mathcal{U} .

Revenons au cas d'une surface S et notons \mathcal{U} une famille finie de disques fermés ou de demi-disques fermés dont les intérieurs recouvrent S . Nous allons maintenant décrire les grandes lignes de la preuve du théorème 6.2. Celle-ci se scinde en deux parties. Une partie de la preuve consiste à montrer que la quantité $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f)$ est à peu près égale à $\delta(\tilde{f}(D))$:

Théorème 6.3. *Il existe deux constantes réelles $C > 0$ et C' telles que, pour tout homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(S)$:*

$$\frac{1}{C}\delta(\tilde{g}(D_0)) - C' \leq \text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq C\delta(\tilde{g}(D_0)) + C'.$$

Dans le cas où le bord de la surface S est non-vide, notons S' une sous-variété à bord de S homéomorphe à S , incluse dans l'intérieur de S et qui est un rétract par déformation de S . On note \mathcal{U} une famille de boules fermées de S dont la réunion des intérieurs contient S' .

Théorème 6.4. *Il existe deux constantes réelles $C > 0$ et C' telles que, pour tout homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ supporté dans S' :*

$$\frac{1}{C}\delta(\tilde{g}(D_0)) - C' \leq \text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq C\delta(\tilde{g}(D_0)) + C'.$$

La minoration de la longueur de fragmentation ne pose pas de difficultés : elle est traitée dans la section suivante dans laquelle nous verrons aussi que la quantité $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ est essentiellement indépendante du recouvrement \mathcal{U} choisi. L'inégalité réciproque est en revanche beaucoup plus technique. La preuve de cette inégalité distingue trois cas : le cas des surfaces à bord (section 5), le cas du tore (section 6) et le cas des surfaces compactes sans bord de genre supérieur (section 7). La preuve semble dépendre fortement du groupe fondamental de la surface en question. En particulier, elle est plus simple dans le cas des surfaces à bord dont le groupe fondamental est libre. Dans le cas du tore, la preuve est un peu astucieuse et, dans le cas des surfaces sans bord de genre supérieur, la preuve est plus difficile et fait intervenir l'algorithme de Dehn pour les groupes à petite simplification (les groupes de surface en l'occurrence).

Expliquons maintenant la deuxième partie de la preuve. Notons M une variété compacte et \mathcal{U} une famille finie de boules fermées ou de demi-boules fermées dont les intérieurs recouvrent M . Dans la section 4, nous montrerons le théorème suivant selon lequel, pour un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(M)$, si la suite $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n)$ ne croît pas trop vite avec n , alors l'homéomorphisme f est un élément de distorsion :

Théorème 6.5. *Si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n) \cdot \log(\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n))}{n} = 0,$$

alors l'homéomorphisme f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(M)$.

De plus, dans le cas d'une variété M à bord, si \mathcal{U} désigne une famille finie de boules fermées incluses dans l'intérieur de M dont les intérieurs recouvrent le support d'un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$, le théorème précédent reste valable dans le groupe $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$. Cette section utilise une technique d'Avila (voir [3]).

La théorème 6.2 découle alors clairement des théorèmes précédents.

La dernière section sera consacrée à la démonstration du résultat suivant, qui montre que la proposition 6.1 est optimale :

Théorème 6.6. *Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0.$$

Alors il existe un homéomorphisme f de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1], \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0, 1\})$ tel que :

1. $\forall n \geq 1, \delta(\tilde{f}^n([0, 1] \times [0, 1])) \geq v_n$;
2. *l'homéomorphisme f est un élément de distorsion $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1], \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0, 1\})$.*

Ce théorème signifie que le fait d'être un élément de distorsion ne donne pas de renseignement sur la croissance du diamètre d'un domaine fondamental autre que la sous-linéarité de celui-ci. Cette remarque vaut pour toute surface S : il suffit de plonger l'anneau $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ dans une surface quelconque S et d'utiliser le théorème précédent pour le voir.

6.3 Quasi-isométries

Dans cette section, nous allons montrer une partie des théorèmes 6.3 et 6.4. Plus précisément, nous allons montrer ces théorèmes en admettant les propositions suivantes dont la preuve sera l'objet des sections 5, 6 et 7.

Proposition 6.7. *Il existe un recouvrement \mathcal{U} fini de S par des disques fermés ou des demi-disques fermés ainsi que des constantes $C \geq 1$ et $C' \geq 0$ tels que, pour tout homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(S)$:*

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq C \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) + C'.$$

Voici maintenant la version de la proposition précédente dans le cas du groupe $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$.

Proposition 6.8. *On fixe une sous-surface à bord S' de S qui est incluse dans l'intérieur de S , est rétract par déformation de S et est homéomorphe à S . Il existe un recouvrement \mathcal{U} fini de S' par des disques fermés inclus dans l'intérieur de S ainsi que des constantes $C \geq 1$ et $C' \geq 0$ tels que, pour tout homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(S)$:*

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq C \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) + C'.$$

Pour démontrer les théorèmes, nous aurons besoin de quelques notations. Comme dans la section précédente, notons S une surface compacte. Deux applications $a, b : \text{Homeo}_0(S) \rightarrow \mathbb{R}$ sont *quasi-isométriques* si et seulement si il existe des constantes $C \geq 1$ et $C' \geq 0$ telles que :

$$\forall f \in \text{Homeo}_0(S), \frac{1}{C} \cdot a(f) - C' \leq b(f) \leq C \cdot a(f) + C'.$$

On considère un domaine fondamental D_0 de l'espace \tilde{S} pour l'action du groupe $\Pi_1(S)$ qui vérifie les propriétés suivantes (voir figure 6.1) :

- si la surface S n'a pas de bord et est de genre g , le domaine fondamental D_0 est un disque fermé bordé par un $4g$ -gone à arêtes géodésiques ;
- si la surface S a un bord non-vide, le domaine fondamental D_0 est un disque fermé bordé par un polygone à arêtes géodésiques tel que toute arête de ce polygone qui n'est pas incluse dans $\partial\tilde{S}$ relie deux arêtes incluses dans $\partial\tilde{S}$.

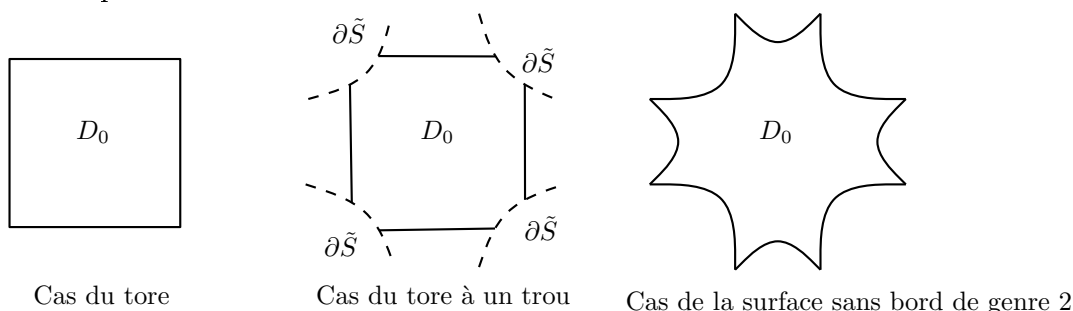


FIGURE 6.1 – Le domaine D_0 dans quelques cas

On note :

$$\mathcal{D} = \{\gamma(D_0), \gamma \in \Pi_1(S)\}.$$

Pour des domaines fondamentaux D et D' dans \mathcal{D} , on note $d_{\mathcal{D}}(D, D') + 1$ le minimum du nombre de domaines fondamentaux rencontrés par un chemin qui joint l'intérieur de D à l'intérieur de D' . L'application $d_{\mathcal{D}}$ est une distance sur \mathcal{D} . On va maintenant donner une interprétation plus algébrique de cette quantité. On note \mathcal{G} l'ensemble fini des automorphismes dans $\Pi_1(S)$ qui envoient D_0 sur un polygone de \mathcal{D} adjacent à D_0 , c'est-à-dire qui a une arête en commun avec D_0 . La partie \mathcal{G} est alors symétrique et constitue une partie génératrice de $\Pi_1(S)$. Notons que l'application

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{G}} : \Pi_1(S) \times \Pi_1(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto l_{\mathcal{G}}(\varphi^{-1}\psi) \end{aligned}$$

constitue une distance sur le groupe $\Pi_1(S)$. On a alors, pour tout couple d'automorphismes (φ, ψ) dans le groupe $\Pi_1(S)$:

$$l_{\mathcal{G}}(\varphi^{-1}\psi) = d_{\mathcal{D}}(\varphi(D_0), \psi(D_0)).$$

On le voit en remarquant que $d_{\mathcal{D}}$ est invariante sous l'action du groupe $\Pi_1(S)$ et en montrant par récurrence sur $l_{\mathcal{G}}(\psi)$ que :

$$l_{\mathcal{G}}(\psi) = d_{\mathcal{D}}(D_0, \psi(D_0)).$$

Étant donnée une partie compacte A de \tilde{S} , on appelle *diamètre discret* de A la quantité suivante :

$$\text{diam}_{\mathcal{D}}(A) = \max \left\{ d_{\mathcal{D}}(D, D'), \left\{ \begin{array}{l} D \in \mathcal{D}, D' \in \mathcal{D} \\ D \cap A \neq \emptyset, D' \cap A \neq \emptyset \end{array} \right\} \right\}.$$

Pour un domaine fondamental D_1 dans \mathcal{D} , on appelle *éloignement* de A par rapport à D_1 la quantité suivante :

$$\text{el}_{D_1}(A) = \max \left\{ d_{\mathcal{D}}(D_1, D), \left\{ \begin{array}{l} D \in \mathcal{D} \\ D \cap A \neq \emptyset \end{array} \right\} \right\}.$$

Remarquons que, dans le cas où $D_1 \cap A \neq \emptyset$, alors :

$$\text{el}_{D_1}(A) \leq \text{diam}_{\mathcal{D}}(A) \leq 2\text{el}_{D_1}(A).$$

Le coeur de cette section est la preuve de la proposition suivante en admettant la proposition 6.7 :

Proposition 6.9. *Les applications suivantes $\text{Homeo}_0(S) \rightarrow \mathbb{R}$ sont quasi-isométriques pour toute famille finie \mathcal{U} de boules fermées ou de demi-boules fermées dont les intérieurs recouvrent la surface S et pour tout domaine fondamental D de \tilde{S} pour l'action du groupe fondamental de S :*

- l'application $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$;
- l'application $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D))$;
- l'application $g \mapsto \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0))$.

En particulier, pour deux recouvrements finis \mathcal{U} et \mathcal{U}' comme ci-dessus, les applications $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ et $\text{Frag}_{\mathcal{U}'}$ sont quasi-isométriques et pour deux domaines fondamentaux D et D' , les applications $f \mapsto \delta(\tilde{f}(D))$ et $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D'))$ sont quasi-isométriques.

Quand le bord de la surface S n'est pas vide, on a un analogue de la proposition précédente dans le cas du groupe $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ que l'on va énoncer maintenant. Comme dans la section précédente, notons S' une sous-variété à bord de S homéomorphe à S , incluse dans l'intérieur de S et qui est un rétract par déformation de S et \mathcal{U} une famille de boules fermées de l'intérieur de S dont la réunion des intérieurs contient S' . Enfin notons $G_{S'}$ le sous-groupe de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ constitué des homéomorphismes supportés dans S' .

Proposition 6.10. *Les applications suivantes $G_{S'} \rightarrow \mathbb{R}$ sont quasi-isométriques pour tout domaine fondamental D de \tilde{S} pour l'action du groupe fondamental de S :*

- l'application $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$;
- l'application $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D))$;
- l'application $g \mapsto \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0))$.

La démonstration de cette proposition ne pose pas de difficultés supplémentaires par rapport à la preuve de la proposition précédente : nous ne la ferons pas.

Ces deux propositions impliquent directement les théorèmes 6.3 et 6.4.

Démonstration. Montrons tout d'abord que, pour deux domaines fondamentaux D et D' , les applications $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D))$ et $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D'))$ sont quasi-isométriques. Notons :

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p\} = \{\gamma \in \Pi_1(S), D' \cap \gamma(D) \neq \emptyset\}.$$

Remarquons que :

$$D' \subset \bigcup_{i=1}^p \gamma_i(D)$$

et que l'ensemble de droite dans cette inclusion est connexe par arcs. On a alors, pour un entier positif n :

$$\tilde{g}(D') \subset \bigcup_{i=1}^p \tilde{g}(\gamma_i(D)).$$

Le lemme ci-dessous implique alors que :

$$\delta(\tilde{g}(D')) \leq p\delta(\tilde{g}(D)).$$

omme les domaines fondamentaux D et D' jouent des rôles symétriques, ceci implique que les applications $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D))$ et $g \mapsto \delta(\tilde{g}(D'))$ sont quasi-isométriques.

Lemme 6.11. *Soit X un espace métrique connexe. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$, une famille de sous-ensembles fermés de X telle que :*

$$X = \bigcup_{i=1}^p A_i.$$

Dans ce cas, on a :

$$\delta(X) = \sup_{x \in X, y \in X} d(x, y) \leq p \max_{1 \leq i \leq p} \delta(A_i).$$

Démonstration. Soient x et y deux points de X . Par connexité de X , on peut trouver un entier k entre 1 et p , une injection $\sigma : [1, k] \cap \mathbb{N} \rightarrow [1, p] \cap \mathbb{N}$ et une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ de points de X qui vérifient les propriétés suivantes :

- $x_1 = x$ et $x_{k+1} = y$.
- pour tout indice i entre 1 et k , les points x_i et x_{i+1} appartiennent tous deux à $A_{\sigma(i)}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \sum_{i=1}^k d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \delta(A_{\sigma(i)}) \\ &\leq p \max_{1 \leq i \leq p} \delta(A_i). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité démontre le lemme. □

Montrons maintenant que, pour deux familles finies \mathcal{U} et \mathcal{U}' comme dans l'énoncé de la proposition, les applications $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ et $\text{Frag}_{\mathcal{U}'}$ sont quasi-isométriques. La démonstration de ce fait va nécessiter les deux lemmes suivants.

Lemme 6.12. *Soit $\epsilon > 0$. Notons B la boule unité fermée de \mathbb{R}^d . Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que tout homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(B, \partial B)$ peut s'écrire comme composé d'au plus N homéomorphismes dans $\text{Homeo}_0(B, \partial B)$ ϵ -proches de l'identité.*

Lemme 6.13. *Soit M une variété compacte et $\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$ un recouvrement ouvert de M . Il existe $\epsilon > 0$ et un entier $N' > 0$ tels que pour tout homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(M)$ (respectivement dans $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$) ϵ -proche de l'identité, il existe des homéomorphismes $g_1, \dots, g_{N'}$ dans $\text{Homeo}_0(M)$ (respectivement dans $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$) tels que :*

- chaque homéomorphisme g_i est supporté dans l'un des ouverts U_j ;
- $g = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{N'}$.

Le lemme 6.12 découle du lemme 5.2 de [5] (noter que la démonstration marche aussi en dimension différente de 2). Le lemme 6.13 est une conséquence de la démonstration du théorème 1.2.3 de [9]. Ces deux lemmes mis bout à bout impliquent qu'étant donné un recouvrement ouvert du disque \mathbb{D}^2 , il existe un entier N tel que tout homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2, \partial \mathbb{D}^2)$ s'écrit comme composé d'au plus N homéomorphismes supportés chacun dans l'un des ouverts du recouvrement. Maintenant, étant donné un élément U de \mathcal{U} , on note $U \cap \mathcal{U}'$ le recouvrement de U constitué des intersections des éléments de \mathcal{U}' avec U . L'application du lemme précédent à la boule U avec le recouvrement $U \cap \mathcal{U}'$ nous fournit alors une constante N_U . Notons \mathbf{N} le maximum des N_U , pour U décrivant \mathcal{U} . On obtient alors directement que, pour tout homéomorphisme g :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}'}(g) \leq \mathbf{N} \text{Frag}_{\mathcal{U}}(g).$$

Comme les deux recouvrements \mathcal{U} et \mathcal{U}' jouent des rôles symétriques, le fait est démontré. Notons que ce fait se généralise à toute dimension.

En utilisant une quasi-isométrie entre les espaces métriques $(\Pi_1(S), d_S)$ et \tilde{S} (voir [29]), on va obtenir le lemme suivant qui implique que les deux dernières applications de la proposition sont quasi-isométriques :

Lemme 6.14. *Il existe des constantes $C \geq 1$ et $C' \geq 0$ telles que, pour tout sous-ensemble compact A de \tilde{S} :*

$$\frac{1}{C} \delta(A) - C' \leq \text{diam}_{\mathcal{D}}(A) \leq C \delta(A) + C'.$$

Démonstration. Fixons un point x_0 de l'intérieur de D_0 . L'application :

$$\begin{aligned} q : \Pi_1(S) &\rightarrow \tilde{S} \\ \gamma &\mapsto \gamma(x_0) \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie pour la distance $d_{\mathcal{G}}$ et la distance naturelle sur \tilde{S} (voir [29]). On remarque que, pour une partie compacte A de \tilde{S} , le nombre $\text{diam}_{\mathcal{D}}(A)$ est égal au diamètre de $q^{-1}(A)$ pour la distance $d_{\mathcal{G}}$, où

$$B = \bigcup \{D, D \in \mathcal{D} \mid D \cap A \neq \emptyset\}.$$

On en déduit qu'il existe des constantes $C_1 \geq 1$ et $C'_1 \geq 0$ indépendantes de A de sorte que :

$$\frac{1}{C_1} \delta(B) - C'_1 \leq \text{diam}_{\mathcal{D}_D}(A) \leq C_1 \delta(B) + C'_1.$$

Il s'agit alors d'utiliser les inégalités suivantes pour conclure :

$$\delta(B) - 2\delta(D_0) \leq \delta(A) \leq \delta(B).$$

□

On va maintenant montrer que, pour tout recouvrement \mathcal{U} comme dans l'énoncé de la proposition, il existe des constantes $C \geq 1$ et $C' \geq 0$ telles que, pour tout homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(S)$:

$$\frac{1}{C} \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) - C' \leq \text{Frag}_{\mathcal{U}}(g).$$

On fixe une telle famille \mathcal{U} . Nous aurons besoin du lemme suivant que nous montrerons ultérieurement :

Lemme 6.15. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout compact A de \tilde{S} et tout homéomorphisme g supporté dans l'un des ensembles de \mathcal{U} , on ait :*

$$\text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(A)) \geq \text{diam}_{\mathcal{D}}(A) - C.$$

Notons $k = \text{Frag}_{\mathcal{U}}(g)$ et :

$$g = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k,$$

où chaque homéomorphisme g_i est supporté dans l'un des éléments de \mathcal{U} . Alors on a :

$$I \circ \tilde{g} = \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2 \circ \dots \circ \tilde{g}_k,$$

où I désigne une isométrie de $\Pi_1(S)$. Le lemme 6.15 combiné à une récurrence implique que :

$$2 = \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}_k^{-1} \circ \dots \circ \tilde{g}_1^{-1} \circ \tilde{g}(D_0)) \geq \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) - kC,$$

car les homéomorphismes \tilde{g}_i commutent tous avec I . Ainsi :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \geq \frac{1}{C} \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) - \frac{2}{C}.$$

La minoration est démontrée.

Preuve du lemme 6.15. Pour un élément U de \mathcal{U} , on note \tilde{U} un relevé de U , c'est-à-dire une composante connexe de $\Pi^{-1}(U)$. Posons :

$$M(U) = \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{U}).$$

Cette dernière quantité ne dépend pas du relevé \tilde{U} choisi. On note M le maximum des $M(U)$, pour U décrivant \mathcal{U} .

On note U_g un élément de \mathcal{U} qui contient le support de g . Considérons deux domaines fondamentaux D et D' qui rencontrent A et qui vérifient :

$$d_{\mathcal{D}}(D, D') = \text{diam}_{\mathcal{D}}(A).$$

Prenons un point x dans $D \cap A$ et un point x' dans $D' \cap A$. Si le point x appartient à $\Pi^{-1}(U_g)$, on note \tilde{U}_g le relevé de U_g qui contient x . Alors le point $\tilde{g}(x)$ appartient à \tilde{U}_g

et un domaine fondamental \hat{D} qui contient le point $\tilde{g}(x)$ est au plus à distance M de D (pour $d_{\mathcal{D}}$). Ainsi dans tous les cas, il existe un domaine fondamental \hat{D} qui contient le point $\tilde{g}(x)$ et est à distance au plus M de D . De même, il existe un domaine fondamental \hat{D}' qui contient le point $\tilde{g}(x')$ et est à distance au plus M de D' . Par conséquent :

$$d_{\mathcal{D}}(\hat{D}, \hat{D}') \geq d_{\mathcal{D}}(D, D') - 2M.$$

On en déduit que :

$$\text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(A)) \geq \text{diam}_{\mathcal{D}}(A) - 2M,$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Ainsi, pour conclure la démonstration de la proposition 6.9, il suffit de montrer la propriété 6.7 ci-dessus. \square

Il s'agit donc maintenant de trouver une famille finie \mathcal{U} pour laquelle la proposition 6.7 ou 6.8 est vérifiée. On va distinguer les cas suivants, chacun d'entre eux faisant l'objet d'une section :

- la surface S a un bord non-vide (section 5).
- la surface S est le tore (section 6).
- la surface S est sans bord de genre supérieur ou égal à deux (section 7).

La preuve des propositions 6.7 et 6.8 consiste dans chacun de ces cas à ramener le bord de $\tilde{g}(D_0)$ proche du bord de ∂D_0 en composant par des homéomorphismes supportés chacun dans l'intérieur de l'une des boules d'un recouvrement \mathcal{U} bien choisi. La plupart du temps, après composition par un homéomorphisme à support dans l'intérieur de l'une des boules de \mathcal{U} , l'image du domaine fondamental D_0 ne rencontrera pas de faces qui n'étaient pas rencontrées avant composition mais ce ne sera pas tout le temps possible, ce qui explique la technicité de certains passages de la preuve. Ensuite, il faudra s'assurer qu'après composition par un nombre uniformément borné d'homéomorphismes supportés dans des intérieurs de \mathcal{U} , l'image du bord de D_0 sera strictement plus proche du bord de D_0 qu'auparavant.

6.4 Distorsion et fragmentation sur les variétés

Dans cette section, on se place dans le contexte d'une variété compacte quelconque M de dimension d , éventuellement à bord. Fixons une famille finie \mathcal{U} de boules fermées ou de demi-boules fermées de M dont la réunion des intérieurs recouvre M . Pour un homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(M)$, on note $a_{\mathcal{U}}(g)$ le minimum des quantités $l \log(k)$, où il existe une suite finie de l homéomorphismes $(f_i)_{1 \leq i \leq l}$ dans $\text{Homeo}_0(M)$, chacun supporté dans l'un des éléments de \mathcal{U} avec :

$$\# \{f_i, 1 \leq i \leq l\} = k$$

et :

$$g = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_l.$$

L'objet de cette section est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.16. *Soit f , un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(M)$. On a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{\mathcal{U}}(f^n)}{n} = 0$$

si et seulement si l'homéomorphisme f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(M)$.

On a un énoncé analogue pour le cas du groupe $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$ que l'on va préciser dans ce qui suit. Notons M' une sous-variété à bord de M homéomorphe à M , incluse dans l'intérieur de M et qui est un rétract par déformation de M . On note \mathcal{U} une famille de boules fermées de M dont la réunion des intérieurs contient M' . Pour un homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$ à support inclus dans M' , on peut définir la quantité $a_{\mathcal{U}}(g)$ de la même manière que ci-dessus. On a l'énoncé suivant :

Proposition 6.17. *Soit f , un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$ à support inclus dans M' . On a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{\mathcal{U}}(f^n)}{n} = 0$$

si et seulement si l'homéomorphisme f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$.

Comme $a_{\mathcal{U}}(f) \leq \text{Frag}_{\mathcal{U}}(f) \cdot \log(\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f))$, les propositions précédentes impliquent clairement le théorème 6.5 et la remarque en-dessous du théorème.

Preuve de l'implication réciproque dans les propositions 6.16 et 6.17. Plaçons-nous tout d'abord dans le cadre de la proposition 6.16. Si l'homéomorphisme f est un élément de distorsion, on note S la partie finie qui apparaît dans la définition d'élément de distorsion. On écrit alors chacun des homéomorphismes de S comme produit d'homéomorphismes supportés dans l'un des ensembles de \mathcal{U} . On note S' l'ensemble (fini) des homéomorphismes qui apparaissent dans une telle décomposition. Alors l'homéomorphisme f^n s'écrit comme composée d'un nombre l_n d'éléments de S' , où l_n est majorée par une constante indépendante de n fois $l_S(f^n)$. Dans ce cas, puisque l'élément f est distordu, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_n}{n} = 0$ et on a :

$$a_{\mathcal{U}}(f^n) \leq \log(\text{card}(S')) l_n$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{\mathcal{U}}(f^n)}{n} = 0.$$

Dans le cas de la proposition 6.17, la seule difficulté supplémentaire est la suivante : les éléments de S ne sont pas nécessairement supportés dans la réunion des boules de \mathcal{U} . Pour résoudre cette difficulté, on considère un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$ qui vaut l'identité sur M' et qui envoie la réunion des supports des éléments de S dans la réunion des intérieurs des boules de \mathcal{U} . Il s'agit alors de considérer la partie finie hSh^{-1} au lieu de S et le raisonnement précédent permet de conclure. \square

Les propositions 6.16 et 6.17 ne seront utilisées dans toute leur puissance que pour démontrer le théorème 6.6 (construction de l'exemple). Pour démontrer le théorème 6.2, nous n'avons eu besoin que du théorème 6.5 qui est plus faible. Notons que si \mathcal{U} désigne

un recouvrement de la sphère par deux voisinages des hémisphères, l'application $\text{Frag}_{\mathcal{U}}$ est majorée par 3 sur le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension n isotopes à l'identité $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ (voir [13]). C'est une conséquence de l'annulus theorem de Kirby (voir [34]) et Quinn (voir [49]). Cette remarque fait apparaître le théorème suivant de Calegari et Freedman (voir [13]) comme un cas particulier du théorème 6.5 :

Théorème 6.18 (Théorème de Calegari-Freedman [13]). *Tout homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est un élément de distorsion.*

La démonstration de la proposition 6.16 repose sur le lemme suivant, dont la démonstration est fortement inspirée d'Avila (voir [3]) :

Lemme 6.19. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'homéomorphismes de \mathbb{R}^d (respectivement de H^d) supportés dans $B(0, 1)$ (respectivement dans $B(0, 1) \cap H^d$). Il existe une partie finie S d'homéomorphismes de \mathbb{R}^d (respectivement de H^d) à support compact tels que :*

- pour tout entier naturel n , l'homéomorphisme f_n appartient au groupe engendré par S ;
- $l_S(f_n) \leq 14 \cdot \log(n) + 14$.

Ce lemme n'est plus vrai en plus grande régularité : il fait intervenir de manière cruciale le fait que, étant donnée une suite d'homéomorphismes (h_n) supportés dans la boule unité $B(0, 1)$, on peut stocker toute l'information relative à cette suite dans un homéomorphisme de la manière suivante. Pour tout entier n , notons g_n un homéomorphisme qui envoie la boule unité sur une boule B_n de sorte que les boules B_n soient deux à deux disjointes et aient un diamètre qui converge vers 0. On peut alors considérer l'homéomorphisme

$$\prod_{n=1}^{\infty} g_n h_n g_n^{-1}$$

qui stocke toute l'information relative à la suite (h_n) . Une telle construction n'est pas possible dans le cas d'une régularité plus grande en toute généralité.

Remarque Il y a deux principales différences entre ce lemme et celui énoncé par Avila :

- dans le cas d'Avila, on considère une suite de difféomorphismes qui converge suffisamment vite (au sens C^∞) vers l'identité, alors qu'ici, on considère une suite quelconque d'homéomorphismes ;
- les estimations obtenues sont logarithmiques au lieu d'être linéaires.

Remarque Ce lemme est optimal au sens où, si les homéomorphismes f_n sont deux à deux distincts, la croissance de $l_S(f_n)$ est au moins logarithmique. En effet, si la partie \mathcal{S} est de cardinal k , il y a au plus $\frac{k^{l+1}-1}{k-1}$ homéomorphisme de longueur par rapport à \mathcal{S} inférieure ou égale à l .

Avant de passer à la démonstration du lemme 6.19, regardons pourquoi ce lemme implique les propositions 6.16 et 6.17.

Preuve de l'implication directe des propositions 6.16 et 6.17. Supposons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{\mathcal{U}}(f^n)}{n} = 0.$$

Notons

$$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_p\}$$

et, pour tout entier i entre 1 et p , φ_i un plongement de \mathbb{R}^d dans M qui envoie la boule fermée $B(0, 1)$ sur U_i si U_i est une boule fermée ou un plongement de H^d dans M qui envoie la demi-boule fermée $B(0, 1) \cap H^d$ sur U_i si U_i est une demi-boule fermée. Pour un entier positif n , notons l_n et k_n deux entiers positifs tels que :

- $a_{\mathcal{U}}(f^n) = l_n \log(k_n)$;
- il existe une famille $(f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{k_n,n})$ d'homéomorphismes de $\text{Homeo}_0(M)$, chacun supporté dans l'un des éléments de \mathcal{U} tels que f^n est composé de l_n homéomorphismes de cette famille.

Considérons une injection croissante $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{l_{\sigma(n)}(C \log(\sum_{i=1}^n k_{\sigma(i)}) + C')}{\sigma(n)} \leq \frac{1}{n},$$

où les constantes C et C' sont donnés par le lemme 6.19. Pour construire une telle injection, il suffit de procéder par récurrence et d'utiliser le fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_n \log(k_n)}{n} = 0.$$

On se donne une bijection :

$$\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \left\{ (i, \sigma(j)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} i \leq k_{\sigma(j)} \\ j \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \right\}$$

telle que , si $\psi(n_1) = (i_1, \sigma(j_1))$, $\psi(n_2) = (i_2, \sigma(j_2))$ et $\sigma(j_1) < \sigma(j_2)$, alors $n_1 < n_2$. Dans ce cas, on a :

$$\psi^{-1}(i, \sigma(j)) \leq \sum_{l=1}^j k_{\sigma(l)}.$$

Notons $\tau_{i,j}$ un entier entre 1 et p tel que :

$$\text{supp}(f_{i,j}) \subset U_{\tau_{i,j}}.$$

Appliquons alors le lemme 6.19 à la suite d'homéomorphismes

$$\varphi_{\tau_{\psi(n)}}^{-1} \circ f_{\psi(n)} \circ \varphi_{\tau_{\psi(n)}}.$$

Notons \mathcal{S} l'ensemble fini donné par le lemme 6.19. On note \mathcal{S}_i , l'ensemble fini des homéomorphismes supportés dans U_i qui s'écrivent $\varphi_i \circ s \circ \varphi_i^{-1}$, où s est un homéomorphisme dans \mathcal{S} et

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{S}_i.$$

D'après le lemme 6.19, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, l_{\mathcal{S}'}(f_{\psi(n)}) \leq C \log(n) + C'.$$

Or, l'homéomorphisme $f^{\sigma(n)}$ peut s'écrire sous la forme :

$$f^{\sigma(n)} = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{l_{\sigma(n)}},$$

où chacun des homéomorphismes g_i appartient à l'ensemble :

$$\left\{ f_{1,\sigma(n)}, f_{2,\sigma(n)}, \dots, f_{k_{\sigma(n)},\sigma(n)} \right\}.$$

Ainsi :

$$l_{\mathcal{S}'}(f^{\sigma(n)}) \leq l_{\sigma(n)}(C \log(\max_{1 \leq i \leq k_{\sigma(n)}} \psi^{-1}(i, \sigma(n))) + C').$$

Par conséquent :

$$\frac{l_{\mathcal{S}'}(f^{\sigma(n)})}{\sigma(n)} \leq \frac{l_{\sigma(n)}(C \log(\sum_{i=1}^n k_{\sigma(i)}) + C')}{\sigma(n)} \leq \frac{1}{n}$$

et l'homéomorphisme f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(M)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(M, \partial M)$). \square

Passons maintenant à la démonstration du lemme 6.19. La démonstration de ce lemme utilisera deux lemmes.

Notons a et b les deux générateurs du semi-groupe libre à deux générateurs L_2 et, pour deux homéomorphismes f et g de \mathbb{R}^d à supports compacts, on note $\eta_{f,g}$ un morphisme de semi-groupe de L_2 vers le groupe des homéomorphismes de \mathbb{R}^d défini par $\eta_{f,g}(a) = f$ et $\eta_{f,g}(b) = g$.

Lemme 6.20. *Il existe des homéomorphismes s_1 et s_2 de \mathbb{R}^d à supports compacts tels que :*

$$\forall m \in L_2, m' \in L_2, m \neq m' \Rightarrow \eta_{s_1,s_2}(m)(B(0,2)) \cap \eta_{s_1,s_2}(m')(B(0,2)) = \emptyset$$

et le diamètre de $\eta_{s_1,s_2}(m)(B(0,2))$ converge vers 0 lorsque la longueur de m tend vers l'infini.

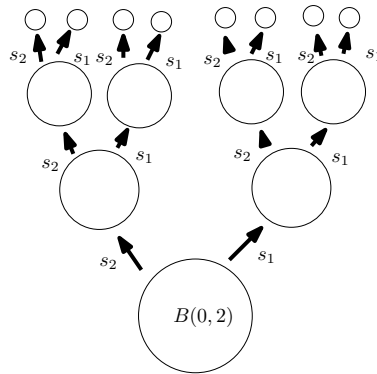


FIGURE 6.2 – Lemme 6.20

Lemme 6.21. *Soit f un homéomorphisme de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$. Il existe alors deux homéomorphismes g et h dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$ tels que :*

$$f = [g, h],$$

où $[g, h] = g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1}$.

Ce dernier lemme est très classique et semble apparaître pour la première fois dans [2]. Nous en donnons maintenant une démonstration.

Démonstration. On note φ un homéomorphisme de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$ de restriction à $B(0, 2)$ définie par :

$$\begin{aligned} B(0, 2) &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on note :

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \frac{1}{2^{n+1}} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Soit f , un élément de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^N)$. Comme tout élément de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$ est conjugué à un élément à support inclus dans l'intérieur de A_0 , on peut supposer f à support inclus dans l'intérieur de A_0 . On définit alors $g \in \text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$ par :

- $g = Id$ en dehors de $B(0, 1)$.
- pour tout entier naturel i , $g|_{A_i} = \varphi^i f \varphi^{-i}$.
- $g(0) = 0$.

Alors :

$$f = [g, \varphi].$$

□

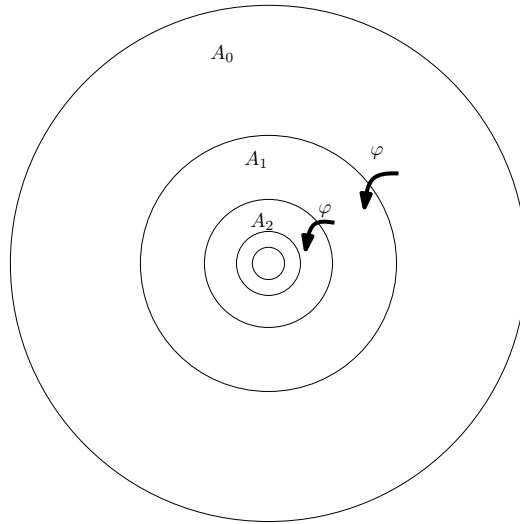


FIGURE 6.3 – Preuve du lemme 6.21 : description de l'homéomorphisme φ

Les deux lemmes précédents sont encore vrais si on remplace \mathbb{R}^d par H^d et $B(0, 2)$ par $B(0, 2) \cap H^d$.

Avant de démontrer le lemme 6.20, montrons le lemme 6.19 à l'aide des deux lemmes précédents.

Preuve du lemme 6.19. On fait la preuve dans le cas des homéomorphismes de \mathbb{R}^d . Le cas du demi-espace se traite de la même manière. Pour un élément m de L_2 , on note $l(m)$ la longueur de m en tant que mot en les lettres a et b . Notons

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^* &\rightarrow L_2 \\ n &\mapsto m_n \end{aligned}$$

une bijection qui vérifie :

$$l(m_n) < l(m_{n'}) \Rightarrow n < n'.$$

Cette dernière condition impose que :

$$l(m_n) = l \Leftrightarrow 2^l \leq n < 2^{l+1}.$$

En particulier, on a, pour tout entier positif n :

$$l(m_n) \leq \log_2(n).$$

Notons s_1 et s_2 les homéomorphismes dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$ donnés par le lemme 6.20. Notons s_3 un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}^d)$ supporté dans la boule $B(0, 2)$ qui vérifie :

$$s_3(B(0, 1)) \cap B(0, 1) = \emptyset.$$

On note B_n la boule fermée $\eta_{s_1, s_2}(m_n)(B(0, 1))$. D'après le lemme 6.21, il existe des homéomorphismes g_n et h_n supportés dans $B(0, 1)$ tels que $f_n = [g_n, h_n]$.

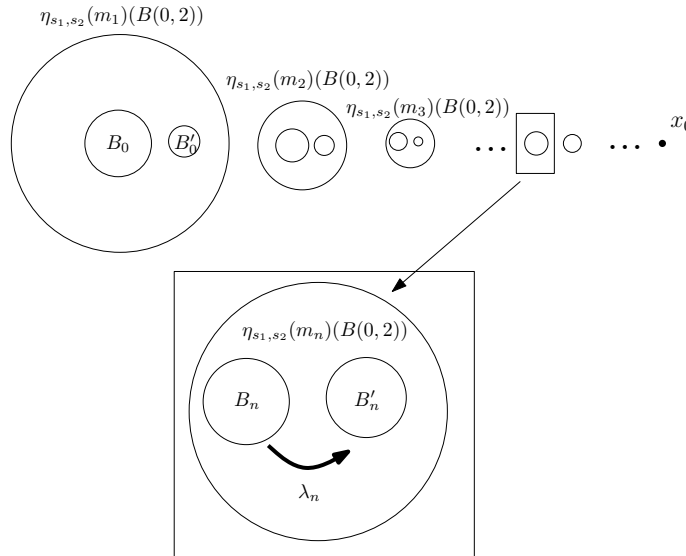


FIGURE 6.4 – Notations de la preuve du lemme 6.19

On définit l'homéomorphisme s_4 par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, s_4|_{B_n} = \eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ g_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} \\ s_4 = Id \text{ sur } \mathbb{R}^d - \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \end{cases}$$

et l'homéomorphisme s_5 par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, s_5|_{B_n} = \eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ h_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} \\ s_5 = Id \text{ sur } \mathbb{R}^d - \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \end{cases}.$$

On pose $\mathcal{S} = \{s_i^\epsilon, i \in \{1, \dots, 5\} \text{ et } \epsilon \in \{-1, 1\}\}$. On note :

$$\begin{cases} \lambda_n = \eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ s_3 \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} \\ B'_n = \lambda_n(B_n) \end{cases}$$

On remarque que les boules B_n et B'_n sont disjointes et incluses dans $\eta_{s_1, s_2}(m_n)(B(0, 2))$. On constate que l'homéomorphisme $s_4 \circ \lambda_n \circ s_4^{-1} \circ \lambda_n^{-1}$ (respectivement $s_5 \circ \lambda_n \circ s_5^{-1} \circ \lambda_n^{-1}$, $s_4^{-1} \circ s_5^{-1} \circ \lambda_n \circ s_5 \circ s_4 \circ \lambda_n^{-1}$) fixe les points en dehors de $B_n \cup B'_n$, coïncide avec $\eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ g_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1}$ (respectivement avec $\eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ h_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1}$, $\eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ g_n^{-1} \circ h_n^{-1} \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1}$) sur B_n et avec $\lambda_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ g_n^{-1} \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} \circ \lambda_n^{-1}$ (respectivement avec $\lambda_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ h_n^{-1} \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} \circ \lambda_n^{-1}$, $\lambda_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ h_n \circ g_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} \circ \lambda_n^{-1}$) sur B'_n .

Par conséquent, l'homéomorphisme

$$[s_4, \lambda_n][s_5, \lambda_n][s_4^{-1} s_5^{-1}, \lambda_n]$$

coïncide avec $\eta_{s_1, s_2}(m_n) \circ f_n \circ \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1}$ sur B_n et fixe tous les points hors de B_n . Ainsi :

$$f_n = \eta_{s_1, s_2}(m_n)^{-1} [s_4, \lambda_n][s_5, \lambda_n][s_4^{-1} s_5^{-1}, \lambda_n] \eta_{s_1, s_2}(m_n).$$

L'homéomorphisme f_n appartient donc au groupe engendré par \mathcal{S} et :

$$\begin{aligned} l_{\mathcal{S}}(f_n) &\leq 2l_{\mathcal{S}}(\eta_{s_1, s_2}(m_n)) + 6l_{\mathcal{S}}(\lambda_n) + 8 \\ &\leq 2l_{\mathcal{S}}(\eta_{s_1, s_2}(m_n)) + 12l_{\mathcal{S}}(\eta_{s_1, s_2}(m_n)) + 14 \\ &\leq 14\log_2(n) + 14. \end{aligned}$$

□

Preuve du lemme 6.20. On commence par prouver le lemme dans le cas des homéomorphismes de \mathbb{R} . Par un argument perturbatif (comme dans [27]), on peut trouver deux homéomorphismes \hat{s}_1 et \hat{s}_2 à support compact dans \mathbb{R} qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall m \in L_2, m' \in L_2, m \neq m' \Rightarrow \eta_{\hat{s}_1, \hat{s}_2}(m)(0) \neq \eta_{\hat{s}_1, \hat{s}_2}(m')(0).$$

On peut même trouver des homéomorphismes \hat{s}_1 et \hat{s}_2 aussi proche que l'on veut de deux homéomorphismes de \mathbb{R} à supports compacts donnés à l'avance. Il suffit alors, de la même manière que la construction de Denjoy, de remplacer chaque point de l'orbite de 0 sous L_2 par un intervalle pour obtenir la propriété souhaitée, ce qui achève la preuve en dimension 1. Pour le cas de la dimension supérieure, on note f et g deux homéomorphismes de \mathbb{R} précédemment obtenus. Notons $[-M, M]$ un intervalle qui contient le support de chacun de ces deux homéomorphismes.

Passons maintenant au cas de \mathbb{R}^d . L'homéomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x_1, x_2, \dots, x_d) &\mapsto (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_d)) \end{aligned}$$

préserve globalement le cube $[-M, M]^d$. On note s_1 un homéomorphisme de \mathbb{R}^d à support inclus dans $[-M-1, M+1]^d$ qui coïncide avec l'homéomorphisme ci-dessus sur $[-M, M]^d$. On note s_2 un homéomorphisme obtenu de la même manière à partir de

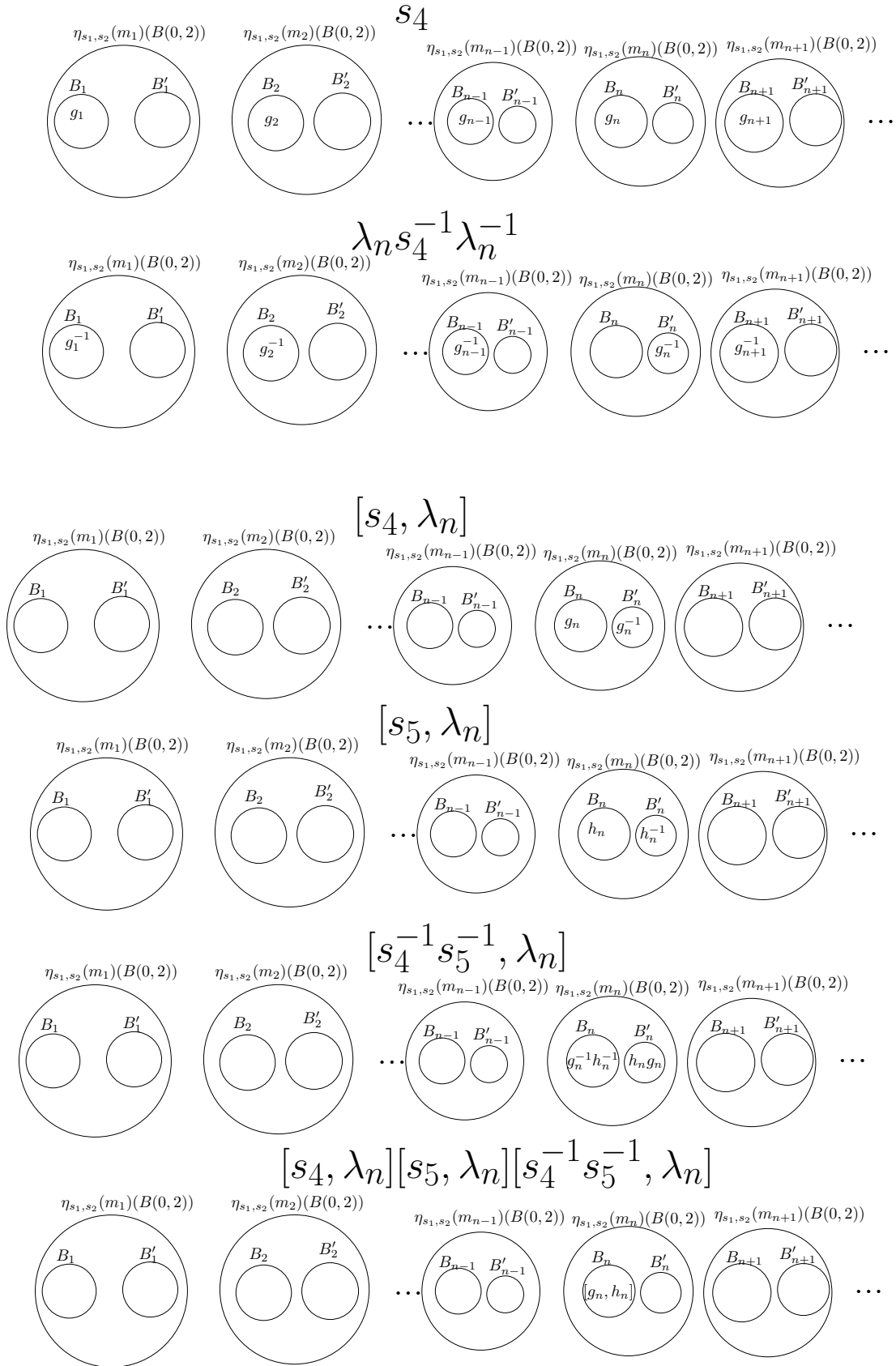


FIGURE 6.5 – Les différents homéomorphismes qui apparaissent dans la preuve du lemme 6.19

l'homéomorphisme g . En utilisant le fait que le boule de centre 0 de rayon 2 de \mathbb{R}^d est incluse dans le cube $[-2, 2]^d$ et le fait que le diamètre des ensembles

$$\eta_{s_1, s_2}(m)([-2, 2]^d) = (\eta_{f, g}(m)([-2, 2]))^d$$

converge vers 0 lorsque la longueur du mot m tend vers l'infini, on obtient la propriété souhaitée. Le cas des demi-espaces H^d s'obtient de la même manière en considérant des homéomorphismes à support compact qui coïncident avec des homéomorphismes de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1} \\ (t, x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) &\mapsto \left(\frac{t}{2}, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{d-1})\right) \end{aligned}$$

sur un voisinage de 0. □

6.5 Cas des surfaces à bord

On suppose que le bord de la surface S n'est pas vide. On va maintenant montrer la proposition 6.8. En considérant un recouvrement par des demi-disques, on peut, avec les mêmes techniques que ci-dessous, montrer la majoration dans la proposition 6.7 dans le cas du groupe $\text{Homeo}_0(S)$, dans le cas où le bord de S n'est pas vide. Les détails de ce dernier cas sont tout à fait analogues à ce qui va suivre : ils sont laissés au lecteur.

Rappelons que l'on a choisi lors de la section précédente un « joli » domaine fondamental D_0 . Notons \tilde{A} l'ensemble des arêtes du bord ∂D_0 qui ne sont pas incluses dans le bord de \tilde{S} et notons :

$$A = \left\{ \Pi(\beta), \beta \in \tilde{A} \right\}.$$

Pour chaque arête α de A , on considère un disque fermé V_α , qui ne rencontre pas le bord de la surface S , dont l'intérieur contient $\alpha \cap S'$ et tel qu'il existe un homéomorphisme $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{D}^2$ qui envoie l'ensemble $\alpha \cap V_\alpha$ sur le diamètre horizontal du disque unité \mathbb{D}^2 . On choisit les disques V_α suffisamment fins de sorte qu'ils soient deux à deux disjoints. On considère un disque fermé U_1 qui contient la réunion disjointe des disques V_α . Soit U_2 un disque fermé de S qui ne rencontre aucune des arêtes de A , c'est-à-dire inclus dans l'intérieur du domaine fondamental D_0 , et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- la surface S' est incluse dans l'intérieur de $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \cup U_2$.
 - pour toute arête α de A , l'ensemble $U_2 \cap V_\alpha$ est homéomorphe à un disque fermé.
- On pose $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$.

Pour démontrer l'inégalité recherchée dans le cas du groupe $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 6.22. *Soit g un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ supporté dans l'intérieur de $\bigcup V_\alpha \cup U_2$. On suppose que $\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) \geq 2$. Il existe des homéomorphismes g_1 , g_2 et g_3 dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ supportés respectivement dans les intérieurs de $\bigcup V_\alpha$, U_2 et $\bigcup V_\alpha$ tels que la propriété suivante soit vérifiée :*

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) - 1.$$

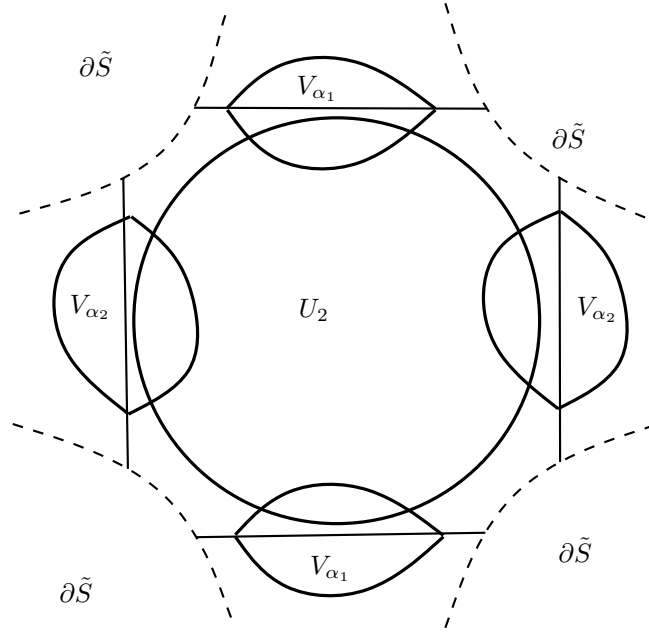


FIGURE 6.6 – Notations dans le cas des surfaces à bord

Lemme 6.23. *Soit g un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ supporté dans l'intérieur de $\bigcup V_\alpha \cup U_2$. Si $\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) = 1$, alors :*

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 6.$$

Fin de la preuve de la propriété 6.8. On pose $k = \text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0))$. D'après le lemme 6.22, après composition de \tilde{g} par $3(k - 1)$ homéomorphismes supportés chacun dans l'un des disques de \mathcal{U} , on obtient un homéomorphisme f_1 supporté dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \cup U_2$ avec :

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{f}_1(D_0)) = 1.$$

On applique alors le lemme 6.23 à l'homéomorphisme f_1 :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f_1) \leq 6.$$

Par conséquent :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 3(\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) - 1) + 6.$$

Or, comme $D_0 \cap \tilde{g}(D_0) \neq \emptyset$, puisque l'homéomorphisme g fixe un voisinage du bord de S :

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) \leq \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)),$$

d'où :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 3\text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) + 3.$$

Ceci termine la preuve. □

Notons que l'on a de fait prouvé la proposition précise suivante :

Proposition 6.24. *Soit g un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ supporté dans l'intérieur de $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \cup U_2$. Alors :*

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 6\text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) + 6.$$

Preuve du lemme 6.22. Donnons tout d'abord les propriétés des homéomorphismes g_1 , g_2 et g_3 qui conviennent. Donnons tout d'abord une idée vague de l'action de ces homéomorphismes. Si l'on regarde les parties « les plus éloignées » de la face D_0 , l'homéomorphisme g_1 les repousse dans l'ouvert U_2 , l'homéomorphisme g_2 les repousse hors de l'ouvert U_2 et l'homéomorphisme g_3 les fait sortir du domaine fondamental de \mathcal{D} dans lequel ces parties étaient incluses (voir figure 6.7). Précisons maintenant ce qui précède.

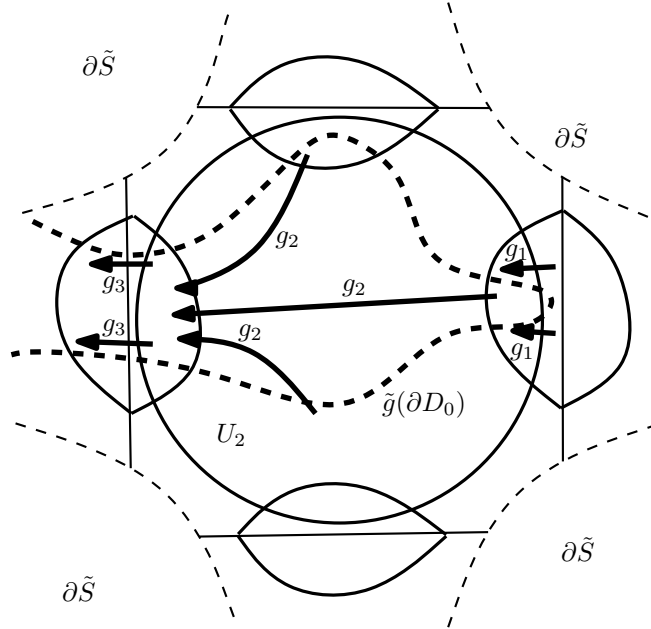


FIGURE 6.7 – Illustration de la preuve du lemme 6.22

On considère pour g_1 un homéomorphisme supporté dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ tel que :

- l'homéomorphisme g_1 fixe $\Pi(\partial D_0)$;
- pour toute arête α et toute composante connexe C de $V_\alpha \cap g(\Pi(\partial D_0))$ qui ne rencontre pas $\Pi(\partial D_0)$, on a :

$$g_1(C) \subset U_2.$$

On peut construire un homéomorphisme g_1 qui vérifie de telles conditions en prenant le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs bien choisi qui s'annule sur $\Pi(\partial D_0)$.

On considère pour g_2 un homéomorphisme supporté dans U_2 qui vérifie la propriété suivante : pour toute arête α de A et pour toute composante connexe C de $\dot{U}_2 \cap g_1 \circ g(\Pi(\partial D_0))$ dont les deux extrémités (i.e. les points de l'adhérence de C qui n'appartiennent pas à C) appartiennent à V_α , l'ensemble $g_2(C)$ est inclus dans \dot{V}_α . Précisons comment un tel homéomorphisme g_2 peut être construit. Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant qui découle du théorème de Schönflies :

Lemme 6.25. *Notons $c_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ et $c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ deux courbes injectives qui coïncident sur un voisinage de 0 et un voisinage de 1 et qui vérifient les propriétés suivantes :*

- $c_1(0) = c_2(0) \in \partial\mathbb{D}^2$ et $c_1(1) = c_2(1) \in \partial\mathbb{D}^2$;
- $c_1((0, 1)) \subset \mathbb{D}^2 - \partial\mathbb{D}^2$ et $c_2((0, 1)) \subset \mathbb{D}^2 - \partial\mathbb{D}^2$.

Il existe alors un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2)$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], h(c_1(t)) = c_2(t).$$

Corollaire 6.26. *Notons $(c_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $(c'_i)_{1 \leq i \leq l}$ deux familles finies de courbes injectives $[0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ du disque fermé \mathbb{D}^2 telles que :*

- pour tout indice $1 \leq i \leq l$, les applications c_i et c'_i coïncident au voisinage de 0 et de 1 ;
- les courbes c_i sont deux à deux disjointes, de même que les courbes c'_i ;
- pour tout indice i , les points $c_i(0)$ et $c_i(1)$ appartiennent au bord du disque ;
- pour tout indice i , les ensembles $c_i((0, 1))$ et $c'_i((0, 1))$ sont inclus dans $\mathbb{D}^2 - \partial\mathbb{D}^2$.

Il existe alors un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2)$ tel que, pour tout indice $1 \leq i \leq l$:

$$\forall t \in [0, 1], h(c_i(t)) = c'_i(t).$$

Preuve du corollaire. Il suffit d'utiliser le lemme précédent et une récurrence. \square

Remarquons tout d'abord que seul un nombre fini de composantes connexes de $\mathring{U}_2 \cap g_1 \circ g(\Pi(\partial D_0))$ n'est pas inclus dans l'un des disques ouverts \mathring{V}_α . On note \mathcal{C} l'ensemble des telles composantes connexes qui ont leurs deux extrémités dans un même disque de la forme V_α , pour une arête α dans A . Fixons maintenant une arête α dans A . Soit C , une composante connexe dans \mathcal{C} dont les deux extrémités appartiennent à V_α . On note $\delta_C : [0, 1] \rightarrow D$ un chemin simple inclus dans $\mathring{V}_\alpha \cap U_2$ qui coïncide avec le chemin \overline{C} au voisinage de $\delta(0)$ et de $\delta(1)$. La construction est faite de sorte que la famille de chemins $(\delta_C)_{C \in \mathcal{C}}$ soit constituée de chemins deux à deux disjointes. On applique alors le corollaire précédent dans le disque U_2 aux familles de chemins $(C)_{C \in \mathcal{C}}$ et $(\delta_C)_{C \in \mathcal{C}}$ pour obtenir l'homéomorphisme g_2 souhaité.

Enfin, on considère pour g_3 un homéomorphisme supporté dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ vérifiant, pour toute arête α de A , les propriétés suivantes :

- pour toute composante connexe C de $\mathring{V}_\alpha \cap g_2 \circ g_1 \circ g(\Pi(\partial D_0))$ dont les deux extrémités sont dans la même composante connexe de $V_\alpha - \alpha$, on a $g_3(C) \cap \alpha = \emptyset$;
- l'homéomorphisme g_3 fixe toute autre composante connexe de $\mathring{V}_\alpha \cap g_2 \circ g_1(\Pi(\partial D_0))$.

La construction de l'homéomorphisme g_3 se fait de la même manière que la construction de l'homéomorphisme g_2 . Dans la suite de ce texte, nous ne donnerons plus de précisions sur ce type de construction qui s'effectue toujours de manière analogue.

Nous affirmons que des homéomorphismes g_1 , g_2 et g_3 qui satisfont aux propriétés ci-dessus vérifient la conclusion du lemme 6.22. Cela va découler des deux affirmations suivantes.

Affirmation 1. L'ensemble des domaines fondamentaux de \mathcal{D} intersectés par $\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(D_0)$ est inclus dans l'ensemble des domaines fondamentaux de \mathcal{D} intersectés par $\tilde{g}(D_0)$.

Si h est un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$, on dira qu'un domaine fondamental D dans \mathcal{D} est extrémal pour \tilde{h} s'il rencontre $\tilde{h}(D_0)$ et vérifie :

$$d_{\mathcal{D}}(D, D_0) = \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)).$$

Affirmation 2. Les domaines fondamentaux D de \mathcal{D} qui sont extrémaux pour \tilde{g} ne rencontrent pas $\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(D_0)$.

Admettons pour l'instant ces deux affirmations et montrons le lemme 6.22.

L'affirmation 1 implique que :

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)).$$

Supposons que l'on ait égalité dans l'inégalité précédente. Alors il existe un domaine fondamental D dans \mathcal{D} qui est extrémal pour \tilde{g} et qui rencontre $\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(D_0)$. Il y a donc contradiction avec l'affirmation 2. Ceci prouve le lemme.

Montrons maintenant l'affirmation 1.

En préliminaire, remarquons que, pour tout homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$, l'ensemble des domaines fondamentaux de \mathcal{D} rencontrés par $\tilde{h}(D_0)$ est égal à l'ensemble des domaines fondamentaux de \mathcal{D} rencontrés par $\tilde{h}(\partial D_0)$ car l'intérieur d'un domaine fondamental ne peut pas contenir un domaine fondamental.

Comme les homéomorphismes \tilde{g}_1 et \tilde{g}_2 fixent tous deux $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} \partial D$, l'ensemble des éléments de \mathcal{D} intersectés par $\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0)$ est égal à l'ensemble des éléments de \mathcal{D} intersectés par $\tilde{g}(\partial D_0)$. Il suffit donc de montrer l'inclusion suivante :

$$\{D \in \mathcal{D}, \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D \neq \emptyset\} \subset \{D \in \mathcal{D}, \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Soit D , un domaine fondamental appartenant à l'ensemble de gauche dans l'inclusion ci-dessus. Soit \tilde{x} , un point de $\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0)$ qui vérifie : $\tilde{g}_3(\tilde{x}) \in D$.

Si le point \tilde{x} appartient au domaine fondamental D , alors le domaine fondamental D appartient à

$$\{D' \in \mathcal{D}, \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D' \neq \emptyset\}.$$

Supposons donc que le point \tilde{x} n'appartienne pas au domaine fondamental D . Comme l'homéomorphisme g_3 est supporté dans $\bigcup_{\beta \in A} V_\beta$, il existe une arête α de A telle que le

point $\Pi(\tilde{x})$ appartient au disque V_α . Notons \tilde{V}_α le relevé du disque V_α qui contient \tilde{x} . Par construction de l'homéomorphisme \tilde{g}_3 , le point \tilde{x} appartient à une composante connexe \tilde{C} de $\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(\partial D_0) \cap \tilde{V}_\alpha$ dont les extrémités sont toutes deux dans l'intérieur d'un même domaine fondamental D' dans \mathcal{D} . Rappelons que les composantes connexes qui ne sont pas de ce type sont fixées par l'homéomorphisme g_3 . Par définition de \tilde{g}_3 , on a alors

$$\tilde{g}_3(\tilde{x}) \in \tilde{g}_3(\tilde{C}) \subset \tilde{D}'$$

et, par hypothèse,

$$\tilde{g}_3(\tilde{x}) \in D.$$

Ainsi, les deux domaines fondamentaux D' et D sont égaux et comme le domaine fondamental D' rencontre $\tilde{C} \subset \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0)$, le domaine fondamental D appartient bien à l'ensemble

$$\{D \in \mathcal{D}, \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Passons à la preuve de l'affirmation 2. Comme dans la section 3, on note

$$\mathcal{G} = \{a_i, i \in \{1, \dots, P\}\} \cup \{a_i^{-1}, i \in \{1, \dots, P\}\}$$

la partie génératrice du groupe $\Pi_1(S)$ formé des automorphismes du revêtement Π qui envoient le domaine fondamental D_0 sur un domaine fondamental de \mathcal{D} adjacent à D_0 . Comme, dans le cas présent, la surface S a un bord non-vide, le groupe $\Pi_1(S)$ est le groupe libre engendré par $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$. Soit D_{ex} , un domaine fondamental dans \mathcal{D} qui est extrémal pour \tilde{g} . En particulier, on a :

$$d_{\mathcal{D}}(D_{ex}, D_0) = \text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)).$$

On note γ l'automorphisme du revêtement Π qui envoie D_0 sur D_{ex} . L'élément γ du groupe $\Pi_1(S)$ admet une unique écriture en tant que mot réduit d'éléments de \mathcal{G} :

$$\gamma = s_1 s_2 \dots s_n$$

où les s_i appartiennent à la partie génératrice \mathcal{G} et $n = d_{\mathcal{D}}(D_{ex}, D_0)$. Tout domaine fondamental de \mathcal{D} adjacent à D_{ex} est de la forme $\gamma(s(D_0))$, où s est un élément de \mathcal{G} . Si l'élément s est distinct de s_n^{-1} , on a :

$$d_{\mathcal{D}}(\gamma(s(D_0)), D_0) = l_{\mathcal{G}}(\gamma s) = n + 1 > n = \text{el}_{D_0}(\tilde{g}(\partial D_0)).$$

Ainsi, la seule face adjacente à D_{ex} qui rencontre $\tilde{g}(\partial D_0)$ est $\gamma \circ s_n^{-1}(D_0)$. On note $\tilde{\alpha}$ l'arête commune aux domaines fondamentaux $\gamma \circ s_n^{-1}(D_0)$ et D_{ex} . Toute composante connexe de $\tilde{g}(\partial D_0) \cap D_{ex}$ a ses extrémités dans $\tilde{\alpha}$ et ne rencontre pas les autres arêtes de ∂D_{ex} . Notons $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ le relevé de $V_{\Pi(\tilde{\alpha})}$ qui contient $\tilde{\alpha}$. On affirme que :

$$\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D_{ex} \subset \tilde{V}_{\tilde{\alpha}} \cup \tilde{U}_2,$$

où \tilde{U}_2 est le relevé de U_2 qui est inclus dans D_{ex} . Justifions cette dernière affirmation. Pour un point \tilde{x} dans $D_{ex} \cap \tilde{g}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(V_{\beta}) - \tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$, où β désigne une arête de A , la composante connexe de $\tilde{g}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(\overset{\circ}{V}_{\beta})$ qui passe par \tilde{x} ne rencontre pas l'ensemble $\Pi^{-1}(\beta)$. Le point $\tilde{g}_1(\tilde{x})$ appartient donc à U_2 , par construction de g_1 . Comme, de plus, l'homéomorphisme \tilde{g}_1 stabilise les ensembles suivants :

$$\tilde{U}_2 - \left(\bigcup_{\beta \in A} \Pi^{-1}(V_{\beta}) \right) \text{ et } \tilde{V}_{\tilde{\alpha}},$$

l'affirmation est démontrée.

On constate aussi que :

$$\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D_{ex} \subset \overset{\circ}{\tilde{V}}_{\tilde{\alpha}}.$$

En effet, toute composante connexe de $\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap \tilde{U}_2$ a ses extrémités dans $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$, d'où la constatation par construction de g_2 .

Montrons maintenant que :

$$\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D_{ex} = \emptyset.$$

Notons C une composante connexe de $\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap \mathring{V}_{\tilde{\alpha}}$. Comme

$$\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\partial D_0) \cap D_{ex} \subset \mathring{V}_{\tilde{\alpha}},$$

les extrémités de C n'appartiennent pas à $\mathring{D}_{ex} \cap \mathring{V}_{\tilde{\alpha}}$ mais à $\gamma \circ s_n^{-1}(D_0) \cap \mathring{V}_{\tilde{\alpha}}$ qui constitue l'autre composante connexe de $\mathring{V}_{\tilde{\alpha}} - \tilde{\alpha}$ (les extrémités de C n'appartiennent pas à α car $\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) = d_{\mathcal{D}}(D_{ex}, D_0) \geq 2$). Par construction de l'homéomorphisme g_3 , on alors :

$$\tilde{g}_3(C) \subset \gamma \circ s_n^{-1}(\mathring{D}_0).$$

Ainsi, l'ensemble $\tilde{g}_3(C)$ est disjoint de D_{ex} , ce qui termine la démonstration de la deuxième affirmation. \square

Preuve du lemme 6.23. Pour chaque arête $\tilde{\alpha}$ dans \tilde{A} , on note $D_{\tilde{\alpha}}$ le domaine fondamental dans \mathcal{D} qui vérifie :

$$D_0 \cap D_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}.$$

Fixons une arête $\tilde{\alpha}$ de \tilde{A} . Comme $\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) = 1$, la courbe $\tilde{g}(\tilde{\alpha})$ ne rencontre pas les domaines fondamentaux de \mathcal{D} adjacents à $D_{\tilde{\alpha}}$ et distincts de D_0 : ces domaines fondamentaux sont à distance 2 de D_0 . Montrons de plus que, si $\tilde{\beta}$ est une arête de \tilde{A} distincte de $\tilde{\alpha}$, alors

$$\tilde{g}(\tilde{\alpha}) \cap D_{\tilde{\beta}} = \emptyset.$$

Dans le cas contraire, on aurait

$$\tilde{g}(D_{\tilde{\alpha}}) \cap D_{\tilde{\beta}} \neq \emptyset,$$

pour une arête $\tilde{\beta}$ distincte de $\tilde{\alpha}$. Notons s l'automorphisme du revêtement Π qui envoie D_0 sur $D_{\tilde{\alpha}}$. Alors :

$$2 = d_{\mathcal{D}}(D_{\tilde{\alpha}}, D_{\tilde{\beta}}) = d_{\mathcal{D}}(D_0, s^{-1}(D_{\tilde{\beta}})).$$

De plus, on a

$$\tilde{g}(s(D_0)) \cap D_{\tilde{\beta}} \neq \emptyset$$

d'où

$$\tilde{g}(D_0) \cap s^{-1}(D_{\tilde{\beta}}) \neq \emptyset.$$

On a donc une contradiction avec l'hypothèse

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{g}(D_0)) = 1.$$

Ainsi, pour toute arête $\tilde{\alpha}$ de \tilde{A} , on a :

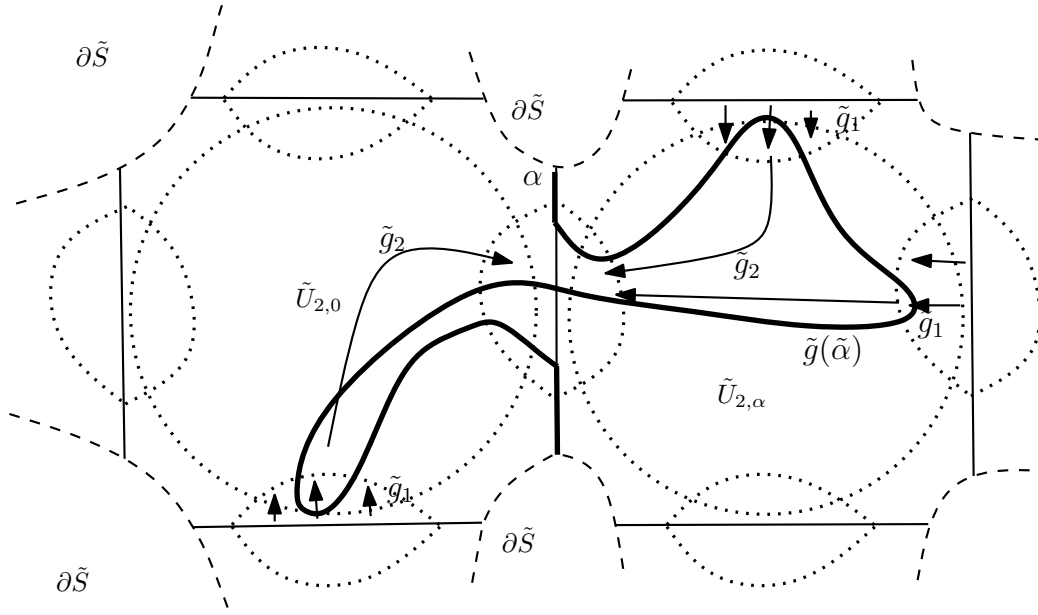
$$\tilde{g}(\tilde{\alpha}) \subset \mathring{D}_{\tilde{\alpha}} \cup \mathring{D}_0 \cup \tilde{\alpha}.$$

Pour une arête $\tilde{\alpha}$ dans \tilde{A} , on note $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ le relevé de $V_{\Pi(\tilde{\alpha})}$ qui contient l'arête $\tilde{\alpha}$.

On va maintenant construire des homéomorphismes g_1 et g_2 supportés respectivement dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_{\alpha}$ et U_2 tels que :

$$\forall \tilde{\alpha} \in \tilde{A}, \quad \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}) \subset \mathring{V}_{\tilde{\alpha}} \cup \tilde{\alpha}.$$

De même que dans la démonstration du lemme 6.22, on construit des homéomorphismes g_1 et g_2 qui vérifient les propriétés suivantes :

FIGURE 6.8 – Preuve du lemme 6.23 : les homéomorphismes g_1 et g_2

- l'homéomorphisme g_1 est supporté dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ et fixe ∂D_0 ;
- pour toute arête α de A et toute composante connexe C de $g(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{V}_\alpha$ qui ne rencontre pas α , on a $g_1(C) \subset U_2$;
- l'homéomorphisme g_2 est supporté dans U_2 ;
- pour toute composante connexe C de $g_1 \circ g(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{U}_2$ dont les extrémités appartiennent à une même composante connexe de $V_\alpha - \alpha$ pour une arête α de A , on a $g_2(C) \subset \mathring{V}_\alpha$.

Notons $\tilde{U}_{2,0}$ le relevé du disque U_2 inclus dans D_0 et, pour toute arête $\tilde{\alpha}$ dans \tilde{A} , $\tilde{U}_{2,\tilde{\alpha}}$ le relevé du disque U_2 inclus dans $D_{\tilde{\alpha}}$. Par les mêmes raisonnements que pour la démonstration du lemme 6.22, on a, pour toute arête $\tilde{\alpha}$ de \tilde{A} :

$$\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}) \subset \mathring{\tilde{U}}_{2,0} \cup \mathring{\tilde{V}}_{\tilde{\alpha}} \cup \mathring{\tilde{U}}_{2,\tilde{\alpha}}$$

et

$$\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}) \subset \mathring{\tilde{V}}_{\tilde{\alpha}}.$$

On va maintenant construire des homéomorphismes g_3 et g_4 de S supportés respectivement dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ et U_2 tels que, pour toute arête $\tilde{\alpha}$ de \tilde{A} , l'homéomorphisme $\tilde{g}_4 \circ \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}$ fixe $\partial \tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$.

On considère pour g_3 un homéomorphisme supporté dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'homéomorphisme g_3 fixe $g_2 \circ g_1 \circ g(\alpha)$;
- pour toute composante connexe C de $g_2 \circ g_1 \circ g(\partial V_\alpha) \cap \mathring{V}_\alpha$, on a : $g_3(C) \subset \mathring{U}_2$.

De cette manière, l'ensemble $g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g(\partial V_\alpha) \Delta \partial V_\alpha$ est inclus dans \mathring{U}_2 .

On demande que l'homéomorphisme g_4 , quant à lui, soit supporté dans U_2 et vérifie la propriété suivante : l'homéomorphisme g_4 coïncide avec $(g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g)^{-1}$ sur le fermé

$g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g(\partial V_\alpha)$. La construction de g_3 a rendu possible la construction de g_4 vérifiant les propriétés ci-dessus. Ainsi, comme l'homéomorphisme $g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g$ fixe chaque point de l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in A} \partial V_\alpha$, l'application $g_5 : S \rightarrow S$, qui coïncide avec $g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g$ sur $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ et avec l'identité en dehors de cet ensemble, est un homéomorphisme de S à support inclus dans $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. On pose alors $g_6 = (g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g)^{-1}$. L'homéomorphisme g_6 est alors supporté dans U_2 et on a :

$$g = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1} \circ g_4^{-1} \circ g_5^{-1} \circ g_6^{-1}.$$

Cela implique que $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 6$, ce qui démontre le lemme. \square

6.6 Cas du tore

Dans cette section, nous montrons la proposition 6.7 dans le cas du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On prend $D_0 = [0, 1]^2$ et le revêtement Π est donné par la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On note A_0 (respectivement A_1, B_0, B_1) l'anneau fermé $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{T}^2$ (respectivement $[\frac{1}{4}, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [\frac{1}{4}, 1]$). Pour un entier relatif i , on note \tilde{A}_0^i (respectivement $\tilde{A}_1^i, \tilde{B}_0^i, \tilde{B}_1^i$) la bande du plan $[i - \frac{1}{4}, i + \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$ (respectivement $[i + \frac{1}{4}, i + 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times [i - \frac{1}{4}, i + \frac{1}{2}], \mathbb{R} \times [i + \frac{1}{4}, i + 1]$). Enfin, on note, pour $i \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{0, 1\}$, $\tilde{\alpha}_j^i$ (respectivement $\tilde{\beta}_j^i$) la courbe $\{i + \frac{j}{2}\} \times \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R} \times \{i + \frac{j}{2}\}$). Le recouvrement \mathcal{U} du tore \mathbb{T}^2 que l'on considère est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{I \times J, I, J \in \{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{4}, 1]\}\} \\ &= \{A_j \cap B_{j'}, j, j' \in \{0, 1\}\}. \end{aligned}$$

Pour une partie compacte A de \mathbb{R}^2 , on pose :

$$\text{largeur}(A) = \text{card} \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}, \tilde{\alpha}_j^i \cap A \neq \emptyset\}$$

et :

$$\text{hauteur}(A) = \text{card} \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}, \tilde{\beta}_j^i \cap A \neq \emptyset\}.$$

Remarquons que, pour toute partie compacte A de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{cases} \text{largeur}(A) \leq 2\text{diam}_{\mathcal{D}}(A) \\ \text{hauteur}(A) \leq 2\text{diam}_{\mathcal{D}}(A) \end{cases}.$$

Fixons un homéomorphisme g dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et un relevé \tilde{g} de g . Notons $i_{\max, \alpha} \in \mathbb{Z}$ et $j_{\max, \alpha} \in \{0, 1\}$ (respectivement $i_{\max, \beta}$ et $j_{\max, \beta}$) les entiers qui vérifient :

$$i_{\max, \alpha} + \frac{1}{2}j_{\max, \alpha} = \max \left\{ i + \frac{1}{2}j, \tilde{g}(D_0) \cap \tilde{\alpha}_j^i \neq \emptyset \right\}$$

(respectivement :

$$i_{\max, \beta} + \frac{1}{2}j_{\max, \beta} = \max \left\{ i + \frac{1}{2}j, \tilde{g}(D_0) \cap \tilde{\beta}_j^i \neq \emptyset \right\}).$$

On considère le couple (i_α, j_α) (respectivement (i_β, j_β)) de sorte que l'intérieur de la bande $\tilde{A}_{j_\alpha}^{i_\alpha}$ (respectivement $\tilde{B}_{i_\alpha}^{j_\beta}$) contienne la courbe $\tilde{\alpha}_{j_{\max}, \alpha}^{i_{\max}, \alpha} = \tilde{\alpha}_{\max}$ (respectivement $\tilde{\beta}_{j_{\max}, \beta}^{i_{\max}, \beta} = \tilde{\beta}_{\max}$). Supposons que $\text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)) > 3$ ou que $\text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) > 3$. Remarquons que les composantes connexes de $\mathring{A}_{j_\alpha} \cap g(\Pi(\partial D_0))$ sont de deux types différents :

- d'une part les composantes connexes qui sont homéomorphes à \mathbb{R} que l'on appellera *composantes connexes régulières* de $\mathring{A}_{j_\alpha} \cap g(\Pi(\partial D_0))$;
- d'autre part, il existe au plus une composante connexe homéomorphe à une réunion de deux droites transverses de \mathbb{R}^2 . C'est la composante connexe qui contient le point $g(0, 0)$. On l'appellera *composante connexe singulière* de $\mathring{A}_{j_\alpha} \cap g(\Pi(\partial D_0))$.

On affirme que l'on est alors dans l'un des deux cas suivants.

Premier cas. Il existe une composante connexe \tilde{C} de $\Pi^{-1}(\mathring{A}_{j_\alpha}) \cap \tilde{g}(\partial D_0)$ telle que :

- les extrémités de \tilde{C} appartiennent à deux composantes connexes du bord de $\Pi^{-1}(A_{j_\alpha})$ distinctes.

- $\text{hauteur}(\tilde{C}) \leq 3$.

Deuxième cas. Il existe une composante connexe \tilde{C} de $\Pi^{-1}(\mathring{B}_{j_\beta}) \cap \tilde{g}(\partial D_0)$ telle que :

- les extrémités de \tilde{C} appartiennent à deux composantes connexes du bord de $\Pi^{-1}(B_{j_\beta})$ distinctes.

- $\text{largeur}(\tilde{C}) \leq 3$.

Démontrons que l'un des deux cas est réalisé. Supposons dans un premier temps que la largeur de $\tilde{g}(D_0)$ est strictement plus grande que 3. Alors il existe une composante connexe \tilde{C} de $\Pi^{-1}(\mathring{A}_{j_\alpha}) \cap \tilde{g}(\partial D_0)$ dont les extrémités appartiennent à des composantes du bord de $\Pi^{-1}(A_{j_\alpha})$ distinctes. Si l'on n'est pas dans le premier cas, c'est que la hauteur de \tilde{C} est strictement plus grande que 3, alors il existe une composante connexe \tilde{C}' de $\mathring{B}_{j_\beta} \cap \tilde{C}$ dont les extrémités appartiennent à deux composantes connexes du bord distinctes de B_{j_β} . Dans ce cas, la composante \tilde{C}' sera de largeur au plus 1 : on est dans le deuxième cas. Enfin, si la largeur de $\tilde{g}(D_0)$ est inférieure ou égale à 3 et la hauteur de ce compact est strictement supérieur à 3, alors toute composante connexe de $\Pi^{-1}(\mathring{B}_{j_\beta}) \cap \tilde{g}(\partial D_0)$ vérifie les conditions du deuxième cas.

Les deux lemmes qui suivent vont nous permettre de conclure la preuve de la proposition 6.7 dans le cas du tore de dimension 2.

Lemme 6.27. *Dans le premier cas ci-dessus, il existe un homéomorphisme h supporté dans A_{j_α} qui vérifie les propriétés suivantes :*

- si $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la deuxième projection, on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |p_2 \circ \tilde{h}(x) - p_2(x)| < 3;$$

- $\text{hauteur}(\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{hauteur}(\tilde{g}(D_0))$;
- $\text{largeur}(\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) - 1$.

On a bien sûr un énoncé symétrique dans le deuxième cas.

Lemme 6.28. *Il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout homéomorphisme g*

dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) \leq 3 \\ \text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)) \leq 3 \end{cases} ,$$

on a :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq C'.$$

Preuve de la proposition 6.7 dans le cas du tore \mathbb{T}^2 . En utilisant le cas de l'anneau traité par la proposition 6.24, on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout homéomorphisme h supporté dans A_{j_α} (respectivement dans B_{j_β}) avec

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |p_2 \circ \tilde{h}(x) - p_2(x)| < 3$$

(respectivement

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |p_1 \circ \tilde{h}(x) - p_1(x)| < 3),$$

on a :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq C.$$

En utilisant le lemme 6.27, on voit qu'en composant l'homéomorphisme g par au plus

$$C \cdot (\max(\text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)) - 3, 0) + \max(\text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) - 3, 0))$$

homéomorphismes à support inclus dans l'un des disques de \mathcal{U} , on obtient un homéomorphisme f_1 qui satisfait aux hypothèses du lemme 6.28 :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f_1) \leq C'.$$

Par conséquent :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 4C \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{g}(D_0)) + C'.$$

La proposition est montrée dans le cas du tore \mathbb{T}^2 . □

Passons maintenant à la preuve des deux lemmes ci-dessus.

Preuve du lemme 6.27. Plaçons-nous dans le premier cas (la démonstration dans le deuxième cas est identique). On considère un homéomorphisme h supporté dans A_{j_α} qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. pour toute composante connexe C régulière de $g(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{A}_{j_\alpha}$ dont les extrémités appartiennent toutes deux à la même composante connexe du bord de A_{j_α} , on a :

$$h(C) \cap \Pi(\tilde{\alpha}_{j_{\max}, \alpha}^{i_{\max}, \alpha}) = \emptyset$$

et, si l'on note \tilde{C} le relevé de C qui est inclus dans $\tilde{g}(\partial D_0)$ et si l'on note q_{\min} et q_{\max} les extrémités de \tilde{C} avec $p_2(q_{\min}) < p_2(q_{\max})$, alors :

$$p_2(\tilde{h}(\tilde{C})) = [p_2(q_{\min}), p_2(q_{\max})];$$

2. l'homéomorphisme h fixe la projection de toute composante connexe de $\tilde{g}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(\mathring{A}_{j_\alpha})$ dont les extrémités appartiennent à des composantes de bord distinctes de $\Pi^{-1}(A_{j_\alpha})$;
3. Si le point $g(0, 0)$ appartient à \mathring{A}_{j_α} , on ajoute la troisième condition suivante. Soit C_0 la composante connexe singulière de $g(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{A}_{j_\alpha}$. Si il existe un relevé \tilde{C}_0 de la composante C_0 qui rencontre $\tilde{g}(\partial D_0)$ et la courbe $\tilde{\alpha}_{max}$, on impose la condition décrite ci-après. Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les composantes connexes de $C_0 - \{g(0, 0)\}$. Seules trois de ces composantes connexes admettent un relevé inclus dans $\tilde{g}(D_0)$ qui rencontre l'intérieur de $\tilde{A}_{j_\alpha}^{i_\alpha}$: pour la dernière composante connexe, les deux relevés de celle-ci inclus dans $\tilde{g}(D_0)$ sont inclus nécessairement dans l'intérieur de $\tilde{A}_{j_\alpha}^{i_\alpha-1}$. Quitte à renuméroter, ces trois composantes connexes sont C_1, C_2 et C_3 . Notons \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 et \tilde{C}_3 des relevés respectifs de C_1, C_2 et C_3 de sorte que ces trois relevés aient une extrémité commune \tilde{q} . Pour un entier i entre 1 et 3, notons \tilde{q}_i l'extrémité de \tilde{C}_i distincte du point \tilde{q} . On renumérote les courbes C_i (et donc \tilde{C}_i) de sorte que :

$$p_2(\tilde{q}_1) < p_2(\tilde{q}_2) < p_2(\tilde{q}_3).$$

Alors, pour tout entier i entre 1 et 3, on impose la condition suivante :

$$h(C_i) \cap \tilde{\alpha}_{max} = \emptyset.$$

De plus :

$$\begin{aligned} p_2(\tilde{h}(\tilde{C}_1)) &= [p_2(\tilde{q}_1), p_2(\tilde{q}_2)], \\ p_2(\tilde{h}(\tilde{C}_2)) &= \{p_2(\tilde{q}_2)\}, \\ p_2(\tilde{h}(\tilde{C}_3)) &= [p_2(\tilde{q}_2), p_2(\tilde{q}_3)]. \end{aligned}$$

Nous affirmons qu'un tel homéomorphisme h vérifie les conditions souhaitées. Tout d'abord, l'existence d'une composante connexe \tilde{C} de $\Pi^{-1}(\mathring{A}_{j_\alpha}) \cap \tilde{g}(\partial D_0)$ dont les extrémités appartiennent à deux composantes connexes distinctes du bord de $\Pi^{-1}(A_{j_\alpha})$ et dont la hauteur est inférieure ou égale à 3 (et donc $\sup p_2(\tilde{C}) - \inf p_2(\tilde{C}) \leq 2$) et le fait que l'homéomorphisme h fixe la projection de cette composante connexe impliquent que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |p_2 \circ \tilde{h}(x) - p_2(x)| < 3.$$

Les conditions sur les ordonnées des images par h des composantes connexes de $\mathring{A}_{j_\alpha} \cap g(\Pi(\partial D_0))$ impliquent que :

$$\text{hauteur}(\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)).$$

Enfin, par construction, l'ensemble $\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)$ ne rencontre pas la courbe $\tilde{\alpha}_{j_{max}, \alpha}^{i_{max}, \alpha}$ et ne rencontre que des courbes de la forme $\tilde{\alpha}_j^i$ déjà rencontrées par l'ensemble $\tilde{g}(D_0)$. Ainsi :

$$\text{largeur}(\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) - 1.$$

Le lemme 6.27 est démontré. □

Preuve du lemme 6.28. Le lecteur est invité à faire sa propre preuve du lemme 6.28, dont une démonstration est plus facile à trouver par soi-même qu'à lire.

Au cours de la preuve du lemme, nous utiliserons à de nombreuses reprises le résultat suivant, qui est une conséquence directe de la proposition 6.8 dans le cas de l'anneau. Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, pour tout homéomorphisme η dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ supporté dans \mathring{A}_0 ou \mathring{A}_1 qui vérifie :

$$\text{hauteur}(\tilde{\eta}(D_0)) \leq 12,$$

on a :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(\eta) \leq \lambda.$$

Remarquons en préliminaire que l'inégalité $\text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) \leq 3$ implique l'inégalité $\text{largeur}(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) \leq 1$. En effet, supposons que $\text{largeur}(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) > 1$. Comme une des arêtes du carré ∂D_0 est incluse dans $\tilde{\alpha}_0^0$ et comme la courbe $\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^1)$ rencontre deux courbes parmi les $\tilde{\alpha}_j^i$ que ne rencontre pas $\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)$, on a :

$$\text{largeur}(\tilde{g}(D_0)) \geq \text{largeur}(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) + 2 > 3.$$

Soit maintenant g , un homéomorphisme qui satisfait aux hypothèses du lemme 6.28. Notons $n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0))$ le nombre de composantes connexes de $\bigcup_{i,j} \partial \tilde{A}_j^i$ rencontrées par le chemin $\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)$. Comme la largeur de $\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)$ est inférieure ou égale à 1, alors $n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) \leq 3$. Nous allons maintenant montrer que, quitte à composer g par un homéomorphisme dont la longueur de fragmentation par rapport à \mathcal{U} est inférieure ou égale à 3λ , on peut supposer que $n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) = 0$.

Supposons que $n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) > 0$. On choisit un couple $(i_0, j_0) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ de sorte que : l'ensemble $\tilde{g}(D_0)$ rencontre $\tilde{A}_{j_0}^{i_0}$ mais ne rencontre qu'une seule composante connexe du bord de $\tilde{A}_{j_0}^{i_0}$ que l'on note c_{i_0, j_0} . On note $\tilde{A}_{j_1}^{i_1}$ l'unique bande parmi les \tilde{A}_j^i dont l'intérieur contient la courbe c_{i_0, j_0} . En particulier, on a : $j_1 \neq j_0$.

On pourra prendre pour $\tilde{A}_{j_0}^{i_0}$ la bande la plus à droite intersectée par le chemin $\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)$ par exemple.

Premier cas. On suppose que l'ensemble $\tilde{g}(D_0)$ intersecte les deux composantes connexes du bord de $\tilde{A}_{j_1}^{i_1}$. On considère un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ à support inclus dans l'intérieur de A_{j_0} qui vérifie les propriétés suivantes :

- pour toute composante connexe \tilde{C} de $\tilde{g}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(A_{j_0})$ qui n'est pas incluse dans l'intérieur de A_{j_1} , on a :

$$\begin{cases} h(\Pi(\tilde{C})) \subset \mathring{A}_{j_1} \\ p_2(h(\Pi(\tilde{C}))) \subset p_2(\Pi(\tilde{C})) \end{cases} ;$$

- l'homéomorphisme h fixe les autres composantes connexes de $g(\Pi(\partial D_0)) \cap A_{j_0}$;
- $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |p_2 \circ \tilde{h}(x) - p_2(x)| < 2$;

Notons que l'avant-dernière condition est compatible avec les précédentes. En effet, comme la hauteur de $\tilde{g}(D_0)$ est inférieure ou égale à 3, alors, pour toute composante connexe \tilde{C} de $\tilde{g}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(A_{j_0})$, on a : $\text{hauteur}(\tilde{C}) \leq 3$. On peut donc faire en sorte que le support de h soit inclus dans une réunion disjointe de disques qui ont

tous une hauteur inférieure ou égale à trois. Pour un tel homéomorphisme h , les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq \lambda \\ n(\tilde{h} \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) < n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) \\ \text{hauteur}(\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)) \end{cases} .$$

La deuxième vient de ce que l'ensemble $\tilde{h} \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)$ n'intersecte plus l'une des composantes connexes du bord de $\tilde{A}_{j_1}^{i_1}$.

Deuxième cas. On suppose que l'ensemble $\tilde{g}(D_0)$ n'intersecte pas les deux composantes connexes du bord de $\tilde{A}_{i_1}^{j_1}$. On construit de manière analogue au premier cas un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ supporté dans \tilde{A}_{j_1} de sorte que la courbe $\tilde{h} \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)$ ne rencontre plus la bande $\tilde{A}_{j_0}^{i_0}$ et que :

$$\begin{cases} \text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq \lambda \\ n(\tilde{h} \circ \tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) < n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) \\ \text{hauteur}(\tilde{h} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq \text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)) \end{cases} .$$

Ainsi, on est ramené à démontrer la propriété suivante. Il existe une constante $C > 0$ telle que, si g est un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ avec $n(\tilde{g}(\tilde{\alpha}_0^0)) = 0$ et $\text{hauteur}(\tilde{g}(D_0)) \leq 3$, alors $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq C$. Considérons donc un tel homéomorphisme g .

Premier cas. $g(\alpha_0) \not\subset A_0$. On considère un homéomorphisme h supporté dans l'anneau A_1 qui préserve le feuilletage horizontal tel que : $h(g(\alpha_0)) \subset A_0$. La préservation du feuilletage horizontal implique en particulier que $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq \lambda$. On est ramené au deuxième cas.

Deuxième cas. $g(\alpha_0) \subset A_0$. On considère un homéomorphisme h supporté dans l'anneau A_0 qui coïncide avec l'homéomorphisme g sur un voisinage de la courbe α_0 . Comme la hauteur de $\tilde{g}(D_0)$ est inférieure ou égale à 3, on peut imposer de plus (et on le fait) que : $\text{hauteur}(\tilde{h}(D_0)) \leq 3$, car on peut faire en sorte que $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|\tilde{h}(\tilde{x}) - \tilde{x}\| < 2$. Ainsi, on a $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq \lambda$. En outre :

$$\text{hauteur}(\tilde{h}^{-1} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq 6.$$

On a donc fixé α qui est l'une des deux composantes du bord de A_1 . Par une procédure analogue, on peut trouver un homéomorphisme h' de sorte que $h'^{-1} \circ h^{-1} \circ g$ fixe un voisinage du bord de A_1 (on fixe l'autre composante de bord) et :

$$\begin{cases} \text{Frag}_{\mathcal{U}}(h') \leq 2\lambda \\ \text{hauteur}(\tilde{h}'^{-1} \circ \tilde{h}^{-1} \circ \tilde{g}(D_0)) \leq 12 \end{cases} .$$

On note h_1 l'homéomorphisme supporté dans A_1 qui coïncide avec $h'^{-1} \circ h^{-1} \circ g$ sur A_1 . La hauteur de $\tilde{h}_1(D_0)$ est plus petite ou égale à 12 d'où : $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h_1) \leq \lambda$. De plus, l'homéomorphisme $h_2 = h_1^{-1} \circ h'^{-1} \circ h^{-1} \circ g$ est supporté dans A_2 . De plus, l'image de D_0 par \tilde{h}_2 est inférieure ou égale à 12 donc : $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h_2) \leq \lambda$. Au final, $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g) \leq 5\lambda$ dans ce cas. Le lemme 6.28 est démontré. \square

6.7 Cas des surfaces de genre $g \geq 2$

Dans cette partie, nous allons démontrer la proposition 6.7 pour une surface S compacte sans bord de genre $g \geq 2$. Commençons par décrire le recouvrement \mathcal{U} que nous utiliserons par la suite. On note p le point de S qui est l'image par Π d'un sommet du polygone ∂D_0 . Notons \tilde{A} l'ensemble des arêtes du polygone ∂D_0 , A l'ensemble des courbes qui sont l'image par Π d'une arête dans \tilde{A} et :

$$B = \left\{ \gamma(\alpha), \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \tilde{A} \\ \gamma \in \Pi_1(S) \end{array} \right\} \right\} = \Pi^{-1}(\Pi(\tilde{A})).$$

On note U_0 un disque fermé de S dont l'intérieur contient le point p et qui vérifie la propriété suivante : si \tilde{U}_0 désigne un relevé de U_0 et \tilde{p} est un relevé du point p , alors le disque \tilde{U}_0 ne rencontre que des arêtes dans B dont une extrémité est \tilde{p} et le bord $\partial \tilde{U}_0$ rencontre chacune d'entre elles en exactement un point. Pour chaque arête α dans A , on note V_α un disque fermé qui ne rencontre pas le point p de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- pour toute arête α dans A , l'ensemble $V_\alpha \cup U_0$ constitue un voisinage de l'arête α ;
- pour toute arête α dans A , l'ensemble $V_\alpha \cap U_0$ est la réunion disjointe de deux disques fermés ;
- les disques V_α sont deux à deux disjoints.

On note U_1 un disque fermé qui contient la réunion des V_α . Enfin, on note U_2 un disque fermé qui ne rencontre aucune arête de A et qui vérifie les propriétés suivantes :

- pour toute arête α dans A , le fermé $U_2 \cap V_\alpha$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux disques fermés ;
- la réunion de l'intérieur du disque U_2 de l'intérieur du disque U_0 et des intérieurs des disques V_α est égale à S ;
- le fermé $(\bigcup_\alpha V_\alpha \cup U_2) \cap U_0$ est homéomorphe à un anneau dont une des composantes connexes du bord est ∂U_0 .

On pose $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$. Les deux lemmes suivants vont nous permettre de conclure la preuve de la proposition 6.7.

Lemme 6.29. *Soit f un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S)$. Supposons que $\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \geq 4g$. Alors il existe un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(S)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq 8g - 2$;
- $\text{el}_{D_0}(\tilde{h} \circ \tilde{f}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) - 1$.

Remarque Nous n'avons pas cherché l'optimalité dans la majoration de la longueur de fragmentation d'un homéomorphisme h qui vérifie $\text{el}_{D_0}(\tilde{h} \circ \tilde{f}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) - 1$.

Lemme 6.30. *Il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$ avec $\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \leq 4g$, on a :*

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f) \leq C'.$$

Fin de la démonstration de la proposition 6.7. Cas d'une surface de genre supérieur.

Comme, d'après le théorème du point fixe de Lefschetz, l'homéomorphisme f admet un point fixe contractile, alors

$$\tilde{f}(D_0) \cap D_0 \neq \emptyset$$

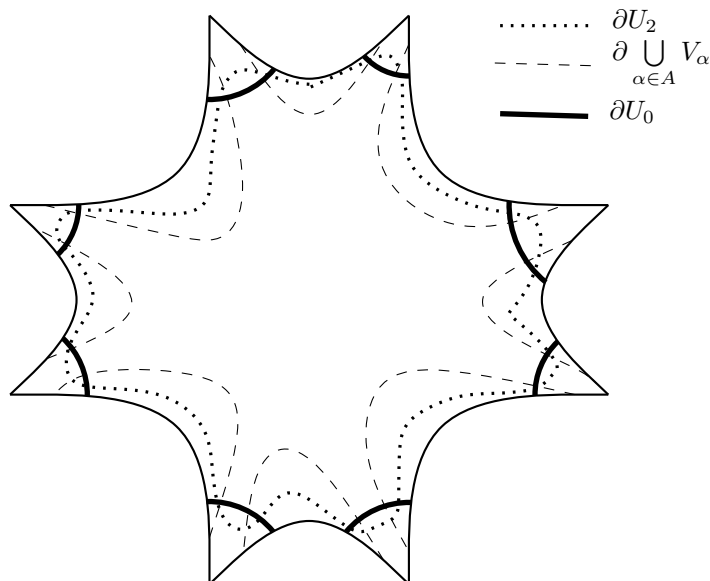


FIGURE 6.9 – Notations dans le cas des surfaces de genre supérieur

et on a

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \leq \text{diam}_{\mathcal{D}}(\tilde{f}(D_0)).$$

Par conséquent, les deux lemmes précédents permettent de conclure la preuve de la proposition 6.7. \square

Pour mener à bien la démonstration du lemme 6.29, nous aurons besoin de quelques lemmes portant sur la combinatoire du groupe $\Pi_1(S)$ que nous présentons dans la section qui suit.

6.7.1 Quelques lemmes combinatoires

Rappelons que deux domaines fondamentaux D_1 et D_2 dans \mathcal{D} sont dits *adjacents* si l'intersection de D_1 et de D_2 est une arête commune aux polygones ∂D_1 et ∂D_2 . Rappelons que \mathcal{G} désigne la partie de $\Pi_1(S)$ constituée des automorphismes de revêtements qui envoient le domaine fondamental D_0 sur un domaine fondamental adjacent à D_0 .

On appelle *mot géodésique* un mot γ dont les lettres sont des éléments de $\mathcal{G} \subset \Pi_1(S)$ tel que la longueur du mot γ , c'est-à-dire son nombre de lettres, est égal à $l_{\mathcal{G}}(\gamma)$ (par abus, on note aussi γ l'image du mot γ dans le groupe $\Pi_1(S)$).

Nous allons maintenant décrire une manière un peu plus géométrique de voir les mots dont les lettres sont des éléments de \mathcal{G} . On appellera *chemin dans \mathcal{D} d'origine D_0* toute suite finie (D_0, D_1, \dots, D_p) de domaines fondamentaux dans \mathcal{D} telle que deux domaines fondamentaux successifs de cette suite sont adjacents. Un tel chemin dans \mathcal{D} sera dit *géodésique* si, de plus, pour tout indice i , $d_{\mathcal{D}}(D_0, D_i) = i$. On remarque qu'il y a une bijection entre les mots en les éléments de \mathcal{G} et les chemins d'origine D_0 dans \mathcal{D} : à un mot $l_1 \dots l_p$, on peut associer le chemin $(D_0, l_1(D_0), l_1 l_2(D_0), \dots, l_1 l_2 \dots l_p(D_0))$.

Cette dernière application est bien bijective et envoie de plus les mots géodésiques sur les chemins géodésiques dans \mathcal{D} .

Pour un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(S)$, on appelle *face maximale* pour h tout domaine fondamental dans \mathcal{D} à distance $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0))$ de D_0 . Il s'agit de montrer qu'en composant h par un nombre indépendant de h d'homéomorphismes supportés dans l'un des disques de \mathcal{U} , l'image de D_0 ne rencontre plus les faces maximales pour h . Il y aura deux types de faces maximales pour h . Les premières, que l'on appellera *non-exceptionnelles*, ne poseront pas de problèmes : après composition par quatre homéomorphismes supportés chacun dans l'un des disques de \mathcal{U} , l'image du domaine fondamental D_0 ne touchera plus ces faces-là. Ces faces sont celles qui vérifient la propriété suivante : dans l'ensemble des faces adjacentes à D , il y en a une seule qui est à distance $d_{\mathcal{D}}(D, D_0) - 1$ de D_0 . Les faces dans \mathcal{D} qui ne vérifient pas cette dernière propriété sont appelées *exceptionnelles*. On va réussir à traiter leur cas en comprenant la combinatoire de l'agencement des domaines fondamentaux dans \mathcal{D} alentours.

Décrivons plus précisément la propriété cruciale qui va être utilisée au cours de la preuve. Notons D une face exceptionnelle et γ un mot géodésique tel que $\gamma(D_0) = D$. On note $(D_0, D_1, \dots, D_M = D)$ le chemin géodésique dans \mathcal{D} qui correspond au mot géodésique γ . Nous allons voir lors du lemme 6.31 que ces faces, pour $j \leq 2g - 1$, ont un sommet commun. La propriété cruciale sera alors la suivante : si $1 \leq k \leq 2g - 2$, pour tout chemin géodésique de la forme $(D_0, \dots, D_{M-k}, D'_{M-k+1}, \dots, D'_M)$, où la face D'_{M-k+1} est distincte de la face D_{M-k+1} , alors les faces D'_{M-k+1}, \dots, D'_M ne sont pas exceptionnelles (voir lemme 6.33).

En remplaçant la face D_0 par un autre domaine fondamental quelconque D_1 dans \mathcal{D} et la partie génératrice \mathcal{G} par la partie génératrice constituée des automorphismes de revêtements qui envoient D_1 sur une face adjacente à D_1 , on peut définir de la même manière les faces exceptionnelles vis-à-vis de D_1 . En particulier, tous les énoncés qui suivent qui portent sur des faces exceptionnelles (vis-à-vis de D_0) se généralisent au cas d'une face exceptionnelle vis-à-vis d'un domaine fondamental quelconque de \mathcal{D} . Nous utiliserons tacitement cette dernière remarque au cours de la preuve du lemme 6.34.

Notons :

$$\mathcal{G} = \{a_i^\epsilon, 1 \leq i \leq g \text{ et } \epsilon \in \{-1, 1\}\} \cup \{b_i^\epsilon, 1 \leq i \leq g \text{ et } \epsilon \in \{-1, 1\}\}$$

de sorte que :

$$\Pi_1(S) = \langle (a_i)_{1 \leq i \leq g}, (b_i)_{1 \leq i \leq g} | [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

On note Λ l'ensemble des permutations cycliques des mots $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ et $[b_g, a_g] \dots [b_1, a_1]$. En terme de chemin dans \mathcal{D} , ces mots reviennent à faire un tour de l'un des sommets du polygone ∂D_0 :

Lemme 6.31. *Pour toute face D dans \mathcal{D} et tout mot $\lambda_1 \dots \lambda_{4g}$ dans Λ , les faces $\lambda_1 \dots \lambda_i(D)$, pour $1 \leq i \leq 4g$, ont un point commun.*

Démonstration. Nous allons montrer que, étant donné un mot λ de Λ les domaines fondamentaux $\lambda_1 \dots \lambda_i(D_0)$, pour $1 \leq i \leq 4g$, ont un point commun. Cette dernière propriété implique alors le lemme par transitivité de l'action du groupe $\Pi_1(S)$ sur l'ensemble \mathcal{D} .

Notons X l'ensemble des $4g$ -uplets $(\delta_i)_{1 \leq i \leq 4g}$ d'éléments de \mathcal{D} qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\delta_{4g} = D_0$;
 - il existe un sommet \tilde{p} de D_0 tel que l'ensemble des éléments de \mathcal{D} qui contiennent le point \tilde{p} est $\{\delta_i, 1 \leq i \leq 4g\}$;
 - tout cercle centré en \tilde{p} de diamètre suffisamment petit et orienté dans le sens direct rencontre successivement les domaines fondamentaux $\delta_1, \dots, \delta_{4g}$ dans cet ordre.
- En particulier, les face δ_i et δ_{i+1} sont adjacentes.

L'ensemble X est naturellement en bijection avec l'ensemble des sommets du polygone ∂D_0 . À un élément $a = (\delta_i)_{1 \leq i \leq 4g}$ dans X , on fait correspondre un mot $\varphi(a) = \lambda = \lambda_1 \dots \lambda_{4g}$ de Λ de la manière suivante : la lettre λ_1 est l'unique automorphisme dans \mathcal{G} qui envoie D_0 sur δ_1 . La deuxième lettre λ_2 est l'unique élément de \mathcal{G} tel que $\lambda_1 \lambda_2(D_0) = \delta_2$. De même, ayant construit les lettres $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ de sorte que $\lambda_1 \dots \lambda_i(D_0) = \delta_i$, on définit la lettre λ_{i+1} par la relation $\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}(D_0) = \delta_{i+1}$. Au final, on a : $\delta_1 \dots \delta_{4g}(D_0) = D_0$ donc le mot $\delta_1 \dots \delta_{4g}$ appartient à l'ensemble Λ .

Ainsi, on a construit une injection qui, à un sommet \tilde{p} de D_0 , associe un mot λ de Λ tel que les domaines fondamentaux $\lambda_1 \dots \lambda_i(D_0)$, pour $1 \leq i \leq 4g$, ont pour point commun \tilde{p} . Notons que le mot λ^{-1} vérifie alors aussi cette dernière propriété. De plus, comme l'ensemble Λ est de cardinal $4g$ et comme l'ensemble des sommets du polygone ∂D_0 est de cardinal $2g$, on obtient la propriété suivante : étant donné un mot λ de Λ , les domaines fondamentaux $\lambda_1 \dots \lambda_i(D_0)$, pour $1 \leq i \leq 4g$, ont un point commun. \square

Le lemme suivant décrit la forme des mots géodésiques qui envoient la face D_0 sur une face exceptionnelle. Ce lemme, ainsi que les lemmes combinatoires qui vont suivre, seront montrés à la fin de cette section.

Lemme 6.32. *Soient D une face exceptionnelle distincte de D_0 . Pour tout mot géodésique γ avec $\gamma(D_0) = D$, l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- les $2g$ dernières lettres du mot γ constituent un sous-mot d'un mot de Λ ;
- les $4g - 1$ dernières lettres de γ sont la concaténation de deux sous-mots λ_1 et λ_2 de longueurs respectives $2g$ et $2g - 1$ de mots de Λ tels que, si l'on note a la dernière lettre de λ_1 et b la première lettre de λ_2 , alors le mot ab n'est inclus dans aucun mot de Λ .

De plus, il existe un mot géodésique γ tel que $\gamma(D_0) = D$ qui vérifie la première propriété ci-dessus. On note $l_1 \dots l_{2g}$ ses $2g$ dernières lettres, où $l_1 \dots l_{4g} \in \Lambda$. En outre, tout mot géodésique qui vérifie cette première propriété a pour $2g$ dernières lettres $l_1 \dots l_{2g}$ ou $l_{4g}^{-1} \dots l_{2g+1}^{-1}$.

Dans le cas $g = 2$, un exemple de mot géodésique associé à une face exceptionnelle qui vérifie la première propriété est $[a_1, b_1] = [b_2, a_2]$ et un exemple de mot géodésique associé à une face exceptionnelle qui vérifie la deuxième propriété est

$$\begin{aligned} a_2^{-1} b_2^{-1} a_1 b_1^2 a_1^{-1} b_1^{-1} &= a_2^{-1} b_2^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1} [a_1, b_1] \\ &= b_2^{-1} a_2^{-1} b_1 [b_2, a_2]. \end{aligned}$$

Ce dernier mot vérifie alors la première propriété.

Fixons une face exceptionnelle D . Notons $l_1 \dots l_{4g}$ un mot de Λ et γ un mot géodésique dont les $2g$ dernières lettres sont $l_1 \dots l_{2g}$ tel que $\gamma(D_0) = D$. On note $\gamma = \gamma' l_1 \dots l_{2g}$

et, pour $0 \leq i \leq 2g$:

$$\begin{cases} D_i^1 = \gamma' l_1 \dots l_{2g-i}(D_0) \\ D_i^2 = \gamma' l_{4g}^{-1} \dots l_{2g+i+1}^{-1}(D_0) \end{cases} .$$

En particulier : $D_0^1 = D_0^2 = D$ et $D_{2g}^1 = D_{2g}^2$. D'après le lemme 6.31, tous ces domaines fondamentaux précédemment définis se rencontrent en un point et ils constituent donc l'ensemble des domaines fondamentaux dans \mathcal{D} qui contiennent ce point.

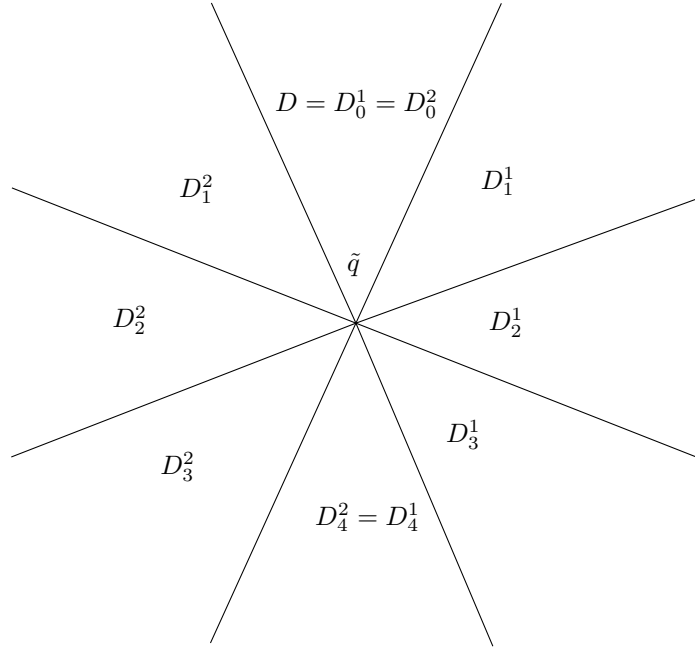


FIGURE 6.10 – Les D_i^j pour une surface de genre 2

Pour un entier positif $l \geq 1$, on appelle *face de type $(0, l)$* tout domaine fondamental D dans \mathcal{D} qui est à distance l de D_0 et qui vérifie la propriété suivante : dans l'ensemble des faces adjacentes à D , il y en a une seule qui est à distance $l - 1$ de D_0 , c'est-à-dire que cette face n'est pas exceptionnelle et est à distance l de D_0 . Dans ce cas, les autres faces adjacentes à D sont à distance $l + 1$ du domaine fondamental D_0 . Ce dernier fait découle de la remarque suivante : si l'on note m un mot constitué d'éléments de \mathcal{G} et l une lettre de \mathcal{G} , les éléments ml et l du groupe $\Pi_1(S)$ n'auront pas même longueur $l_{\mathcal{G}}$ modulo 2 puisque les relations qui définissent ce groupe sont de longueur paire. En utilisant la notion de mot géodésique, on peut donner une autre définition (équivalente) des faces de type $(0, l)$: une face de type $(0, l)$ est un domaine fondamental D dans \mathcal{D} tel que tous les mots géodésiques γ qui satisfont à $\gamma(D_0) = D$ ont même dernière lettre et sont de longueur l .

Pour un entier k entre 0 et l , on définit par récurrence l'ensemble des faces de type (k, l) de la manière suivante. Une *face de type (k, l)* est un domaine fondamental D dans \mathcal{D} qui est à distance $l - k$ de D_0 et qui vérifie la propriété suivante : toutes les faces adjacentes à D , sauf une, sont de type $(k - 1, l)$. En particulier, une face de type (k, l) est aussi de type $(0, l - k)$ (ou même $(k - i, l - i)$, pour $0 \leq i \leq k$). Une définition équivalente des faces de type (k, l) est la suivante. Considérons un mot géodésique de longueur $l - k$ γ' tel que $\gamma'(D_0) = D$. La face D sera de type (k, l) si et seulement, pour tout mot réduit m de longueur inférieure ou égale à k tel que le mot $\gamma'm$ est réduit, la face $\gamma'm(D_0)$

n'est pas exceptionnelle. On peut interpréter aussi cette définition en termes de chemins géodésiques dans \mathcal{D} . Notons (D_0, \dots, D_{l-k}) un chemin géodésique dans \mathcal{D} . La face D_{l-k} sera de type (k, l) si et seulement si pour tout prolongement géodésique de la forme $(D_0, \dots, D_{l-k}, D_{l-k+1}, \dots, D_l)$ du chemin précédent, les faces D_{l-k}, \dots, D_l ne sont pas exceptionnelles. La propriété cruciale décrite ci-dessus peut se traduire de la manière suivante : pour une face exceptionnelle D , pour un entier $1 \leq j \leq 2g - 2$, les faces adjacentes à D_j^1 distinctes de D_{j-1}^1 et D_{j+1}^1 sont de type $(j-1, d_{\mathcal{D}}(D, D_0))$. Remarquons au passage que la face D_j^1 n'est pas de type $(j, d_{\mathcal{D}}(D, D_0))$ puisque la face D , qui est exceptionnelle, est à distance j de D .

Le lemme suivant jouera un rôle central dans la preuve du lemme 6.29 et se déduit du lemme 6.32.

Lemme 6.33. *Pour des indices i entre 1 et $2g-2$ et $j \in \{1, 2\}$, les domaines fondamentaux adjacents à D_i^j qui sont distincts de D_{i+1}^j et de D_{i-1}^j sont de type $(i-1, d_{\mathcal{D}}(D_0, D))$.*

Le lemme suivant est symétrique au lemme 6.32.

Lemme 6.34. *Soit D_1 , un domaine fondamental dans \mathcal{D} . Supposons qu'il existe deux mots géodésiques de premières lettres distinctes a et b tels que :*

$$\gamma_1(D_0) = \gamma_2(D_0) = D_1.$$

Remarquons que dans ce cas le domaine fondamental D_0 est une face exceptionnelle vis-à-vis de D_1 . Alors il existe un mot géodésique γ tel que $\gamma(D_0) = D_1$ dont les $2g$ premières lettres $\lambda_1 \dots \lambda_{2g}$ constituent un sous-mot d'un mot $\lambda_1 \dots \lambda_{4g}$ de Λ . De plus, les domaines fondamentaux D_0 , $a(D_0)$ et $b(D_0)$ ont un point commun \tilde{p} qui vérifie la propriété suivante : les domaines fondamentaux dans \mathcal{D} qui contiennent le point \tilde{p} sont de la forme $\lambda_1 \dots \lambda_i(D_0)$ ou $\lambda_{4g}^{-1} \dots \lambda_{4g-i+1}^{-1}(D_0)$, avec $0 \leq i \leq 2g$.

Pour un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(S)$, on note $l(h)$ le maximum des quantités de la forme $d_{\mathcal{D}}(D, D_0)$, où D est un domaine fondamental dans \mathcal{D} qui contient l'image par l'homéomorphisme \tilde{h} d'un sommet du polygone ∂D_0 .

Lemme 6.35. *Soit h un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S)$. Supposons qu'il existe un domaine fondamental D_1 dans \mathcal{D} dont l'intérieur contient l'image par \tilde{h} d'un sommet \tilde{p} du polygone ∂D_0 . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1. $d_{\mathcal{D}}(D_1, D_0) = l(h)$;
2. le domaine fondamental D_0 est une face exceptionnelle vis-à-vis de D_1 .

La face D_1 est alors unique parmi les faces qui vérifient les propriétés ci-dessus. Dans ce cas, il existe un mot $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{4g}$ dans Λ et un mot géodésique γ tels que $\gamma(D_0) = D_1$ et les $2g$ premières lettres de γ sont $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2g}$: $\gamma = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2g} \gamma'$. De plus, les sommets du polygone ∂D_0 sont les points de la forme $\tilde{p}_i = \lambda_i^{-1} \lambda_{i-1}^{-1} \dots \lambda_1^{-1}(\tilde{p})$ ou $\tilde{p}'_i = \lambda_{4g-i+1} \lambda_{4g-i+2} \dots \lambda_{4g}(\tilde{p})$. Ces points sont deux à deux distincts sauf dans les deux cas suivants : $\tilde{p}'_0 = \tilde{p}_0 = \tilde{p}$ et $\tilde{p}'_{2g} = \tilde{p}_{2g}$.

Passons maintenant à la preuve du lemme 6.29.

6.7.2 Preuve du lemme 6.29

Preuve du lemme 6.29. Soit f un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S)$ tel que $\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \geq 4g$. La preuve va se dérouler en deux temps. Nous allons tout d'abord construire un homéomorphisme η_1 de sorte que l'ensemble $\tilde{\eta}_1 \circ \tilde{f}(D_0)$ ne rencontre plus les faces de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)))$ pour $0 \leq i \leq 2g - 2$, puis un homéomorphisme η_2 de sorte que l'ensemble $\tilde{\eta}_2 \circ \tilde{\eta}_1 \circ \tilde{f}(D_0)$ ne rencontre pas non plus les faces exceptionnelles maximales pour f . Les constructions seront faites de sorte que les quantités $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(\eta_i)$ sont majorées par une constante indépendante de l'homéomorphisme f considéré. Précisons maintenant ce qui précède.

Lemme 6.36. *Soit h un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S)$. On suppose que $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) \geq 4g$. Il existe alors un homéomorphisme η dans $\text{Homeo}_0(S)$ tel que :*

- $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(\eta) \leq 4(2g - 2) + 1$;
- $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta} \circ \tilde{h}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0))$;
- l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

1. $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta} \circ \tilde{h}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) - 1$;
2. l'ensemble $\tilde{\eta} \circ \tilde{h}(D_0)$ ne rencontre pas les faces de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$ pour $0 \leq i \leq 2g - 2$.

Démonstration. En préliminaire à la preuve, notons qu'il y a deux types de composantes connexes de $h(\Pi(\partial D_0)) - \Pi(\partial D_0)$: les composantes connexes homéomorphes à \mathbb{R} que l'on appellera *régulières* et (si l'image par h du sommet de $\Pi(\partial D_0)$ ne rencontre pas $\Pi(\partial D_0)$, ce que l'on supposera dans tous les lemmes qui suivent pour simplifier) une composante connexe dite *singulière* homéomorphe à la réunion de $2g$ droites du plan deux à deux transverses qui s'intersectent toutes en un même point. Cette dernière composante connexe est celle qui contient le sommet de $\Pi(\partial D_0)$. La gestion de ce dernier type de composante connexe est technique et nécessitera des lemmes tout au long de la preuve. En première lecture, le lecteur pourra sauter les passages sur le traitement de la composante singulière. Le lemme suivant est l'un de ceux-là.

Lemme 6.37. *Soit h un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S)$. Fixons un entier j dans $[0, 2g - 2]$. On suppose que l'homéomorphisme h vérifie les propriétés suivantes :*

- $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) \geq 4g$;
- le point $h(p)$ n'appartient pas à l'ensemble $\Pi(\partial D_0)$;
- l'ensemble $\tilde{h}(D_0)$ ne rencontre pas les faces de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$ si $0 \leq i < j$;
- l'image par l'homéomorphisme \tilde{h} d'un sommet \tilde{p} du polygone ∂D_0 appartient à une face D_1 de type $(j, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$.

Dans ce cas, l'image par l'homéomorphisme \tilde{h} de tout sommet du polygone ∂D_0 distinct de \tilde{p} n'appartient pas à une face de type $(j, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$. De plus, la face D_0 est exceptionnelle vis-à-vis de D_1 .

Démonstration. Supposons tout d'abord que $j = 0$. Le lemme 6.35 implique que l'image par l'homéomorphisme \tilde{h} des autres sommets du polygone ∂D_0 appartiennent à des domaines fondamentaux dans \mathcal{D} strictement plus proches de D_0 que D_1 . Supposons maintenant que $j \geq 1$. Nous allons montrer par l'absurde que la face D_1 est exceptionnelle vis-à-vis de D_0 . Notons $s(D_0)$, où s est un automorphisme dans \mathcal{G} , une face adjacente à

D_0 qui contient le point \tilde{p} . Supposons par l'absurde que $d_{\mathcal{D}}(s(D_0), D_1) = d_{\mathcal{D}}(D_0, D_1) + 1$. Alors :

$$\begin{cases} d_{\mathcal{D}}(D_0, s^{-1}(D_1)) = d_{\mathcal{D}}(D_0, D_1) + 1 \\ \tilde{h}(s^{-1}(\tilde{p})) \in s^{-1}(D_1) \end{cases}.$$

Montrons alors que la face $s^{-1}(D_1)$ est de type $(j-1, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$. Notons γ un mot géodésique tel que $\gamma(D_0) = D_1$. Comme $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) \geq 4g$, le mot γ est de longueur au moins $2g$. De plus, comme $d_{\mathcal{D}}(s(D_0), D_1) = d_{\mathcal{D}}(D_0, D_1) + 1$, le mot $s^{-1}\gamma$ est géodésique. Si l'on concatène $i \in [0, j]$ lettres quelconques a_1, a_2, \dots, a_i à droite avec γ de sorte que le mot $\gamma a_1 a_2 \dots a_i$ soit un mot réduit, alors les $2g$ dernières lettres du mot obtenu ne constituent pas un sous-mot d'un mot de Λ , puisque la face D_1 est de type $(j, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$. Par conséquent, si l'on concatène $i \in [0, j-1]$ lettres quelconques a_1, a_2, \dots, a_i à droite avec le mot géodésique $s^{-1}\gamma$ de sorte que le mot obtenu soit réduit, les $2g-1$ dernières lettres du mot obtenu ne constituent pas un sous-mot d'un mot de Λ . D'après le lemme 6.32, les faces $s^{-1}\gamma a_1 a_2 \dots a_i(D_0)$ ne sont pas exceptionnelles donc la face $s^{-1}(D_1)$ est de type $(j-1, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$. Il y a une contradiction avec l'hypothèse du lemme.

Ainsi, la face D_0 est exceptionnelle vis-à-vis de D_1 et, en utilisant le lemme 6.35, on voit que l'image par l'homéomorphisme \tilde{h} des sommets de ∂D_0 distincts de \tilde{p} appartiennent à des domaines fondamentaux dans \mathcal{D} strictement plus proches de D_0 que D_1 , ce qui démontre le lemme. \square

Posons $M = \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0))$. Considérons une petite perturbation de l'identité η_0 supportée dans l'intérieur de l'un des disques de \mathcal{U} de sorte que :

$$\begin{cases} \text{el}_{D_0}(\tilde{\eta}_0 \circ \tilde{h}(D_0)) \leq M \\ \eta_0 \circ h(p) \notin \Pi(\partial D_0) \end{cases}.$$

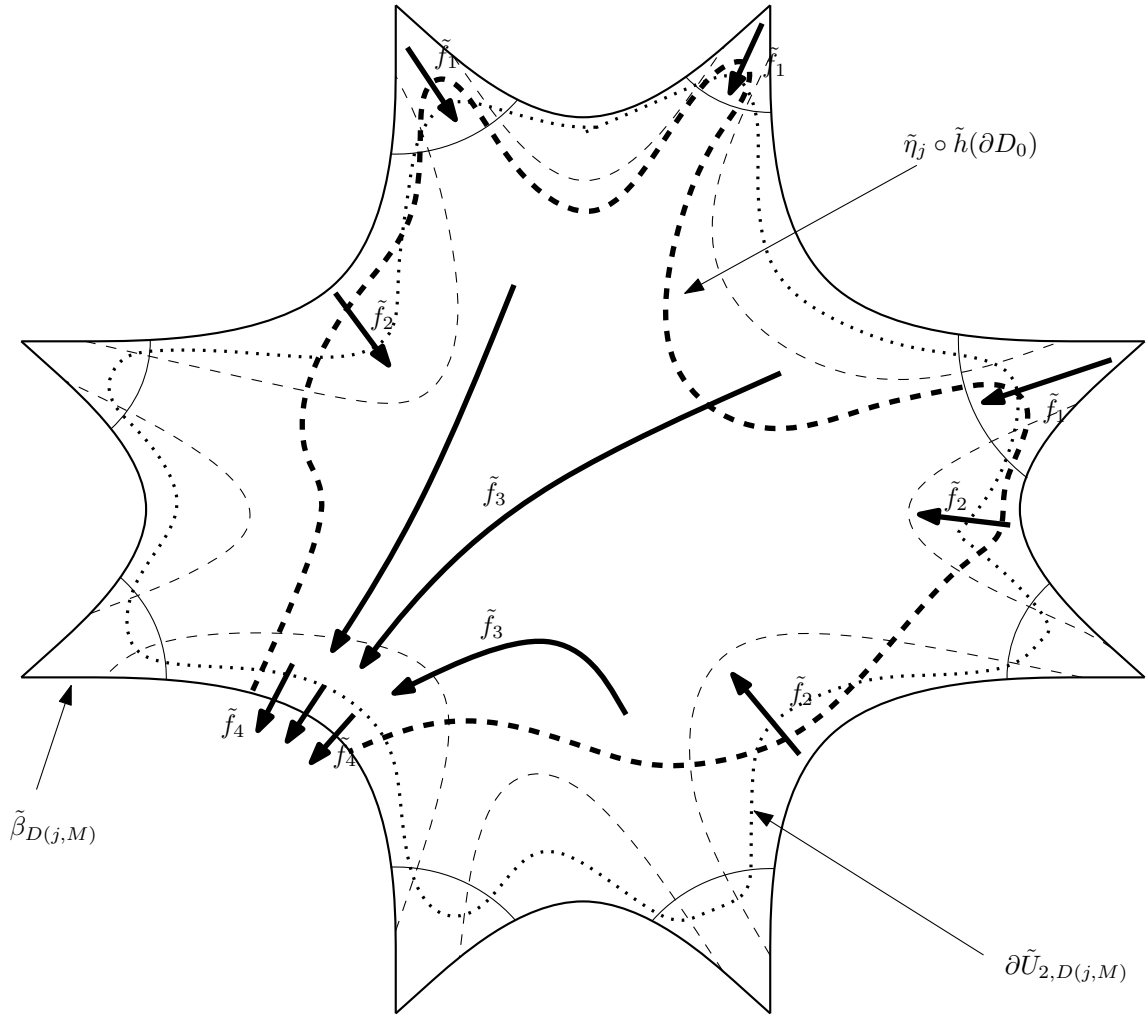
Remarquons que, si $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta}_0 \circ \tilde{h}(D_0)) \leq M-1$, alors le lemme est démontré en posant $\eta = \eta_0$. Supposons maintenant que, pour un entier $j \in [0, 2g-2]$, nous ayons construit un homéomorphisme η_j dans $\text{Homeo}_0(S)$ tel que :

- $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(\eta_j) \leq 4(j-1) + 1$;
- $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0)) = M$;
- l'ensemble $\tilde{\eta}_j(\tilde{h}(D_0))$ ne rencontre pas les faces de type (i, M) pour $0 \leq i < j$;
- le point $\eta_j \circ h(p)$ n'appartient pas à $\Pi(\partial D_0)$.

Nous allons alors construire un homéomorphisme η_{j+1} de sorte que l'ensemble $\tilde{\eta}_{j+1} \circ \tilde{h}(D_0)$ ne rencontre pas non plus les faces de type (j, M) . Cet homéomorphisme sera construit en composant l'homéomorphisme η_j par quatre homéomorphismes f_1, f_2, f_3 et f_4 supportés chacun dans l'intérieur de l'un des disques de \mathcal{U} . Les homéomorphismes f_i pour $1 \leq i \leq 3$ vérifieront la propriété P suivante :

$$\left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{f}_i \dots \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0) \neq \emptyset \right\} = \left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0) \neq \emptyset \right\}.$$

Si l'image par $\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}$ d'un sommet \tilde{p} du polygone ∂D_0 appartient à une face D de type (j, M) , c'est-à-dire que l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, on note \tilde{C}_1 la composante connexe de $\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap \tilde{D}$ qui contient le point $\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\tilde{p})$. C'est l'unique composante connexe de $\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) - \Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$ contenant l'image par l'homéomorphisme $\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 qui est incluse dans une face de type (j, M) , d'après le lemme précédent. Remarquons que $\Pi(\tilde{C}_1)$ est inclus dans la composante singulière de $\eta_j \circ h(\Pi(D_0)) - \Pi(\partial D_0)$.

FIGURE 6.11 – Idée de la preuve du lemme 6.36 : la face $D(j, M)$

On considère un homéomorphisme f_1 supporté dans l'intérieur du disque U_0 qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'homéomorphisme f_1 préserve globalement chaque arête dans A ;
- pour toute composante connexe C de $\mathring{U}_0 \cap \eta_j \circ h(\Pi(\partial D_0))$ qui ne contient pas le point p , on a

$$f_1(C) \subset \bigcup_{\alpha \in A} \mathring{V}_\alpha \cup \mathring{U}_2;$$

- traitement de la composante singulière : si l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, on impose de plus que l'image de $\Pi(\tilde{C}_1)$ par f_1 soit incluse dans l'ouvert

$$\bigcup_{\alpha \in A} \mathring{V}_\alpha \cup \mathring{U}_2.$$

Noter que cette condition n'est pas redondante avec la condition précédente lorsque $\Pi(\tilde{C}_1)$ est inclus dans une composante connexe de $\mathring{U}_0 \cap \eta_j \circ h(\Pi(\partial D_0))$ qui contient le point p .

Notons que, comme l'ensemble \tilde{C}_1 est inclus dans une face de type (j, M) , alors l'ensemble $\overline{\Pi(\tilde{C}_1)}$ ne contient pas le point p (sinon le fermé $\overline{\tilde{C}_1}$ rencontrerait une face de

type $(j-1, M)$, ce qui est exclu par hypothèse sur l'homéomorphisme η_j). Pour obtenir un tel homéomorphisme f_1 , il suffit de prendre le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs pour lequel le point p est un point fixe répulsif, qui est tangent aux arêtes de A et est supporté dans le disque ouvert \mathring{U}_0 . Comme l'homéomorphisme f_1 préserve globalement $\Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$, cet homéomorphisme vérifie la propriété P . Notons $D(j, M)$ une face de type (j, M) . Rappelons que, par définition, si $j \geq 1$, toutes les faces adjacentes à $D(j, M)$ sauf une sont de type $(j-1, M)$. Notons $\tilde{\beta}_{D(j, M)}$ l'arête commune à la face $D(j, M)$ et à l'unique face adjacente à $D(j, M)$ qui est à distance $d_D(D(j, M), D_0) - 1$ du domaine fondamental D_0 . Alors, par hypothèse, toute composante connexe de $\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D(j, M)$ a ses extrémités incluses dans l'intérieur $\tilde{\beta}_{D(j, M)} - \partial \tilde{\beta}_{D(j, M)}$ de l'arête $\tilde{\beta}_{D(j, M)}$. Notons $\tilde{U}_{2, D(j, M)}$ le relevé du disque U_2 inclus dans le domaine fondamental $D(j, M)$. La construction de l'homéomorphisme f_1 implique alors que :

$$\tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D(j, M) \subset \tilde{U}_{2, D(j, M)} \cup \Pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right).$$

On considère un homéomorphisme f_2 dans $\text{Homeo}_0(S)$ supporté dans la réunion des disques V_α , où α décrit l'ensemble A , qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'homéomorphisme f_2 fixe toutes les arêtes dans A ;
- pour toute arête α dans A et toute composante connexe C de $f_1 \circ \eta_j \circ h(\Pi(\partial D_0)) \cap V_\alpha$ qui ne rencontre pas l'arête α , on a $f_2(C) \subset \mathring{U}_2$;
- traitement de la composante singulière : si l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, on impose de plus que $f_2 \circ f_1(\Pi(\tilde{C}_1)) \subset \mathring{U}_2$.

Notons $\tilde{V}_{\tilde{\beta}_{D(j, M)}}$ le relevé du disque $V_{\Pi(\tilde{\beta}_{D(j, M)})}$ qui rencontre l'arête $\tilde{\beta}_{D(j, M)}$. Comme l'homéomorphisme \tilde{f}_2 fixe $\Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$, il vérifie la propriété P . De plus, par construction de l'homéomorphisme f_2 , on a, pour toute face $D(j, M)$ de type (j, M) :

$$\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D(j, M) \subset \tilde{V}_{\tilde{\beta}_{D(j, M)}} \cup \mathring{U}_{2, D(j, M)}.$$

De la même manière, on construit un homéomorphisme f_3 supporté dans l'intérieur de U_2 tel que, pour toute face $D(j, M)$ de type (j, M) , on a :

$$\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D(j, M) \subset \tilde{V}_{\tilde{\beta}_{D(j, M)}}.$$

Comme cet homéomorphisme fixe $\Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$, il vérifie aussi la propriété P . Enfin, on considère un homéomorphisme f_4 dans $\text{Homeo}_0(S)$ supporté dans la réunion disjointe des disques ouverts \mathring{V}_α , où α décrit l'ensemble A , qui vérifie les propriétés suivantes pour toute arête α de A :

- pour toute composante connexe C de $f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \eta_j \circ h(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{V}_\alpha$ dont les extrémités appartiennent à la même composante connexe de $V_\alpha - \alpha$, on a $f_4(C) \cap \alpha = \emptyset$;
- l'homéomorphisme f_4 fixe toute autre composante connexe de $f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \eta_j \circ h(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{V}_\alpha$ régulière ;
- traitement de la composante singulière : si l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, notant \tilde{C}'_1 la composante connexe de $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(\cup_\alpha \mathring{V}_\alpha)$ qui contient l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 et qui rencontre une face de type (j, M) , alors :

$$f_4(\Pi(\tilde{C}'_1)) \cap \alpha = \emptyset.$$

- dans le cas où l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ ne vérifie pas les hypothèses du lemme précédent, alors l'homéomorphisme f_4 fixe l'éventuelle composante connexe de $f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \eta_j \circ h(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{V}_\alpha$ qui n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} et a des extrémités dans les deux composantes connexes de $V_\alpha - \alpha$.

Nous allons maintenant montrer que l'homéomorphisme $\eta_{j+1} = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \eta_j$ vérifie alors les propriétés souhaitées, à savoir que $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta}_{j+1} \circ \tilde{h}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0))$ et que l'ensemble $\tilde{\eta}_{j+1} \circ \tilde{h}(D_0)$ ne rencontre pas les faces de type (i, M) lorsque $0 \leq i \leq j$. Nous allons distinguer plusieurs morceaux de la courbe $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0)$: le morceau $\tilde{k}_1 = \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) - \Pi^{-1}(\cup_\alpha V_\alpha)$ et le morceau $\tilde{k}_2 = \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(\cup_\alpha V_\alpha)$. À chaque fois, nous montrerons que l'image par f_4 du morceau en question ne rencontre pas de faces supplémentaires (c'est-à-dire qui n'étaient pas déjà intersectées par la courbe $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0)$) et ne rencontre pas de faces de type (j, M) .

Premier cas Si \tilde{C} désigne l'adhérence d'une composante connexe de \tilde{k}_1 , alors $f_4(\tilde{C}) = \tilde{C}$ est contenu dans une face qui appartient à l'ensemble :

$$\left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0) \neq \emptyset \right\} = \left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0) \neq \emptyset \right\}$$

et n'est pas incluse dans une face de type (j, M) car, pour toute face $D(j, M)$ de type (j, M) , on a :

$$\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D(j, M) \subset \mathring{V}_{\tilde{\beta}_{D(j, M)}}.$$

Deuxième cas Si \tilde{C} est une composante connexe de \tilde{k}_2 dont les extrémités n'appartiennent pas à la même composante connexe de $\Pi^{-1}(\cup_\alpha V_\alpha - \alpha)$ et dont on suppose de plus, dans le cas où l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, qu'elle ne contient pas l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 alors $\tilde{f}_4(\tilde{C}) = \tilde{C}$ est inclus dans des faces de l'ensemble :

$$\left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0) \neq \emptyset \right\}$$

et ne rencontre pas de faces de type (j, M) .

Troisième cas Si \tilde{C} est une composante connexe de \tilde{k}_2 dont toutes les extrémités appartiennent à la même composante connexe de $\Pi^{-1}(\cup_\alpha V_\alpha - \alpha)$, alors la partie $\tilde{f}_4(\tilde{C})$ est contenue dans l'intérieur du domaine fondamental dans \mathcal{D} qui contient les extrémités de \tilde{C} et qui, par conséquent, n'est pas de type (j, M) car pour toute face $D(j, M)$ de type (j, M) , on a :

$$\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D(j, M) \subset \mathring{V}_{\tilde{\beta}_{D(j, M)}}.$$

De plus, une telle face appartient à l'ensemble :

$$\left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}(D_0) \neq \emptyset \right\}.$$

Quatrième cas Abordons enfin le cas où l'homéomorphisme $\eta_j \circ h$ vérifie les hypothèses du lemme précédent et où \tilde{C} est une composante connexe de \tilde{k}_2 qui contient l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 . Notons \tilde{p} le sommet du polygone dont l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{\eta}_j \circ \tilde{h}$ appartient à une face D_1 de type (j, M) . D'après les lemmes 6.37 et 6.35, il existe un mot géodésique de la forme $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2g} \gamma$, où le mot $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{4g}$ appartient à Λ , qui envoie la face D_0 sur la face D_1 . Notons γ' le mot γ auquel on a retiré la dernière lettre. Par construction de l'homéomorphisme f_4 , d'après le lemme 6.35, l'ensemble $\tilde{f}_4(\tilde{C})$ est inclus dans la réunion des domaines fondamentaux suivants :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma'(D_0) \\ & \lambda_{i+1} \dots \lambda_{2g} \gamma(D_0) \text{ si } 1 \leq i \leq 2g \\ & \lambda_{i+1} \dots \lambda_{2g} \gamma'(D_0) \text{ si } 1 \leq i \leq 2g \\ & \lambda_{4g-i}^{-1} \dots \lambda_{2g}^{-1} \gamma(D_0) \text{ si } 1 \leq i \leq 2g \\ & \lambda_{4g-i}^{-1} \dots \lambda_{2g}^{-1} \gamma'(D_0) \text{ si } 1 \leq i \leq 2g. \end{aligned}$$

Ces domaines fondamentaux sont tous à distance plus petite que $M - j - 1$ de D_0 et ne sont donc pas de type (i, M) si $0 \leq i \leq j$. Le lemme 6.36 est démontré car, soit $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta}_{j+1} \circ \tilde{h}(D_0)) < \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0))$ et $\eta = \eta_{j+1}$ convient, soit on peut continuer la procédure jusqu'à ce que, éventuellement, l'autre propriété soit vérifiée. \square

Pour un homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(S)$, on note \mathcal{F}_h la réunion de l'ensemble des faces exceptionnelles maximales pour l'homéomorphisme h et de l'ensemble des domaines fondamentaux dans \mathcal{D} à distance plus petite que $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) - 1$ et plus grande que $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) - (2g - 2)$ de D_0 et ayant un sommet commun avec une face exceptionnelle maximale pour h . D'après le lemme 6.33, les faces D qui appartiennent à cette dernière catégorie vérifient la propriété suivante : notant \tilde{p} le sommet du bord de D qui appartient à une face exceptionnelle maximale, toutes les faces adjacentes à D qui ne contiennent pas le point \tilde{p} sont de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$, pour un entier i entre 0 et $2g - 3$.

Lemme 6.38. *Soit h , un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $h(p) \notin \Pi(\partial D_0)$;
- $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) \geq 4g$;
- l'ensemble $\tilde{h}(D_0)$ ne rencontre pas les faces de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$ pour tout indice $0 \leq i \leq 2g - 2$.

Il existe alors un homéomorphisme η dans $\text{Homeo}_0(S)$ tel que, pour tout domaine fondamental D dans \mathcal{F}_h , les composantes connexes de $\tilde{\eta} \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D$ sont incluses dans $\Pi^{-1}(\mathring{U}_0)$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\eta \circ h(p) \notin \Pi(\partial D_0)$;
- $\text{el}_{D_0}(\tilde{\eta} \circ \tilde{h}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0))$;
- $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(\eta) \leq 4$;
- l'ensemble $\tilde{\eta} \circ \tilde{h}(D_0)$ ne rencontre pas les faces de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$ pour $0 \leq i \leq 2g - 2$.

Démonstration. Au cours de la preuve du lemme, nous aurons besoin du résultat suivant qui permet de traiter le cas des composantes singulières :

Lemme 6.39. Soit h un homéomorphisme de S qui satisfait aux hypothèses du lemme 6.38. Supposons qu'il existe un sommet \tilde{p} du polygone ∂D_0 tel que le point $\tilde{h}(\tilde{p})$ appartient à un domaine fondamental D_1 dans \mathcal{F}_h à distance i d'une face D_{max} exceptionnelle maximale pour h , avec $0 \leq i \leq 2g - 2$. Alors il existe deux sous-mots $\lambda_1 \dots \lambda_{2g}$ et $\lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-1}$ de mots $\lambda_1 \dots \lambda_{4g}$ et $\lambda'_1 \dots \lambda'_{4g}$ dans Λ et un mot géodésique de la forme $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-1}$ tels que :

- $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-1-i}(D_0) = D_1$;
- $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-1}(D_0) = D_{max}$;
- les sommets du polygone ∂D_0 sont les points de la forme $\lambda_i^{-1} \dots \lambda_1^{-1}(\tilde{p})$ ou $\lambda_{4g-i+1} \dots \lambda_{4g}(\tilde{p})$.

Remarque Le lemme implique en particulier que le point \tilde{p} est l'unique sommet du polygone ∂D_0 dont l'image par \tilde{h} appartient à un domaine fondamental dans \mathcal{F}_h .

Démonstration. Notons \tilde{p}' le sommet du polygone ∂D_0 tel que le point $\tilde{h}(\tilde{p}')$ appartient à un domaine fondamental D'_1 dans \mathcal{D} à distance $l(h)$ de D_0 . Alors, d'après le lemme 6.35, $D'_1 = \lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma'(D_0)$, où $\lambda_1 \dots \lambda_{2g}$ est un sous-mot de longueur $2g$ d'un mot $\lambda_1 \dots \lambda_{4g}$ dans Λ et $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma'$ est un mot géodésique. De plus, d'après ce même lemme, quitte à remplacer $\lambda_1 \dots \lambda_{2g}$ par $\lambda_{4g}^{-1} \dots \lambda_{2g+1}^{-1}$, on peut supposer que $\tilde{p} = \lambda_j^{-1} \dots \lambda_1^{-1}(\tilde{p}')$, où $0 \leq j \leq 2g$. Par conséquent, la face D_1 est de la forme $D_1 = \lambda_{j+1} \dots \lambda_{2g} \gamma'(D_0)$. Comme la face D_1 appartient à \mathcal{F}_h , d'après le lemme 6.32, on a $\gamma' = \gamma \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-i-1}$, où $\lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-1}$ est un sous-mot de longueur $2g - 1$ d'un mot dans Λ et :

$$D_{max} = \lambda_{j+1} \dots \lambda_{2g} \gamma \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-1}(D_0).$$

Le lemme sera montré si $j = 0$. Supposons par l'absurde que $j \geq 1$. Comme $d_{\mathcal{D}}(D'_1, D_0) \leq d_{\mathcal{D}}(D_{max}, D_0)$, alors $j \leq i$. De plus, d'après le lemme 6.32, les faces de la forme $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma' \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-i-1} a_1 \dots a_k(D_0)$, où $0 \leq k \leq i - j$, les lettres a_i sont des éléments de \mathcal{G} et le mot $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \gamma' \lambda'_1 \dots \lambda'_{2g-i-1} a_1 \dots a_k$ est réduit, ne sont pas exceptionnelles, de sorte que la face D'_1 est de type $(i - j, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$. Il y a contradiction avec le fait que l'ensemble $\tilde{h}(\partial D_0)$ ne rencontre pas de face de ce type. \square

Par des méthodes similaires à celles utilisées pour montrer le lemme 6.36, on construit un homéomorphisme f_1 qui est composé d'un homéomorphisme supporté dans U_0 et d'un homéomorphisme supporté dans la réunion des V_α , qui préserve globalement $\Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$ et satisfait à la propriété suivante. Soit D , un domaine fondamental dans \mathcal{F}_h . La face D a alors exactement deux faces adjacentes qui sont dans \mathcal{F}_h et on note $\tilde{\alpha}_D$ et $\tilde{\beta}_D$ les arêtes communes aux bords de l'une de ces faces et à ∂D . On note $\tilde{U}_{2,D}$ le relevé du disque U_2 inclus dans D , $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}_D}$ le relevé de $V_{\Pi(\tilde{\alpha}_D)}$ qui rencontre $\tilde{\alpha}_D$, $\tilde{V}_{\tilde{\beta}_D}$ le relevé de $V_{\Pi(\tilde{\beta}_D)}$ qui rencontre $\tilde{\beta}_D$ et $\tilde{U}_{0,D}$ le relevé de U_0 qui contient le point $\tilde{\alpha}_D \cap \tilde{\beta}_D$. Alors, pour toute composante connexe \tilde{C} de $\tilde{h}(\partial D_0) \cap D$, on a :

$$\tilde{f}_1(\tilde{C}) \subset \tilde{U}_{0,D} \cup \tilde{V}_{\tilde{\alpha}_D} \cup \tilde{V}_{\tilde{\beta}_D} \cup \tilde{U}_{2,0}.$$

De plus, si aucune des extrémités de \tilde{C} ne rencontre E , où E est l'un des ensembles $\tilde{U}_{0,D}$, $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}_D}$ ou $\tilde{V}_{\tilde{\beta}_D}$ et si \tilde{C} n'a pas une extrémité dans $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}_D}$ et une autre dans $\tilde{V}_{\tilde{\beta}_D}$ alors $\tilde{f}_1(\tilde{C})$ ne rencontre pas E .

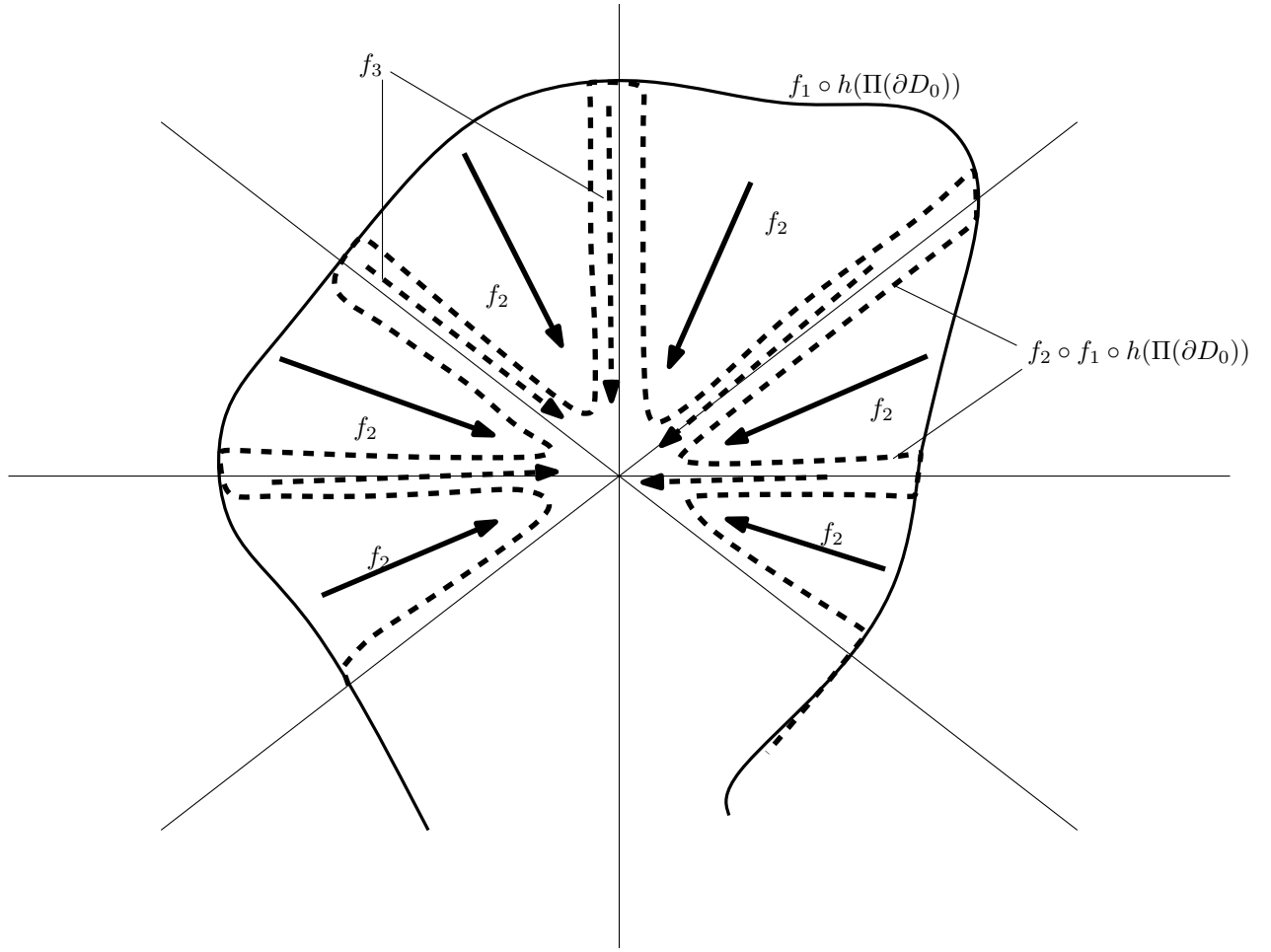


FIGURE 6.12 – Illustration de la preuve du lemme 6.38

Si l'homéomorphisme h ne vérifie pas les hypothèses du lemme précédent, on note \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $f_1 \circ h(\Pi(\partial D_0)) - \Pi(\partial D_0)$ dont les extrémités appartiennent soit toutes à une même arête de A , soit à deux arêtes consécutives de A (i.e. des arêtes qui admettent des relevés qui ont un point commun et sont incluses dans une même face dans \mathcal{D}). Si l'homéomorphisme h vérifie les hypothèses du lemme précédent, on définit l'ensemble \mathcal{C} comme la réunion de l'ensemble précédemment décrit et du singleton $\{\Pi(\tilde{C}_1)\}$, où \tilde{C}_1 est l'unique composante connexe de $\tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) - \Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$ qui contient l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_1 \circ \tilde{h}$ d'un sommet de ∂D_0 et qui est incluse dans une face dans \mathcal{F}_h .

On construit un homéomorphisme f_2 supporté dans U_2 qui vérifie la propriété suivante : étant données deux arêtes α et β consécutives, pour tout élément C de \mathcal{C} dont les extrémités appartiennent à $\alpha \cup \beta$, on a : $f_2(C) \subset V_\alpha \cup V_\beta \cup U_0$. De plus, si les extrémités de C évitent un ensemble E parmi V_α , V_β ou U_0 , alors $f_2(C)$ est disjoint de E . La construction implique que, pour tout domaine fondamental D dans \mathcal{F}_h et toute composante connexe \tilde{C} de $\tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D$, on a :

$$\tilde{f}_2(\tilde{C}) \subset \tilde{U}_{0,D} \cup \tilde{V}_{\tilde{\alpha}_D} \cup \tilde{V}_{\tilde{\beta}_D}.$$

De plus, si l'ensemble \tilde{C} évite un disque E parmi $\tilde{U}_{0,D}$, $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}_D}$ ou $\tilde{V}_{\tilde{\beta}_D}$, alors $\tilde{f}_2(\tilde{C})$ évite

aussi ce disque. Comme l'homéomorphisme f_2 est supporté dans U_2 , on a :

$$\left\{ D \in \mathcal{D}, \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(D_0) \cap D \neq \emptyset \right\} = \left\{ D \in \mathcal{D}, \tilde{h}(D_0) \cap D \neq \emptyset \right\}.$$

On considère ensuite un homéomorphisme f_3 supporté dans la réunion des V_α qui satisfait aux propriétés suivantes :

- pour toute arête α dans A et toute composante connexe C de $f_2 \circ f_1 \circ h(\Pi(\partial D_0)) \cap V_\alpha$ dont les extrémités appartiennent à une même composante connexe de $U_0 \cap V_\alpha$, alors $f_3(C) \subset U_0$;
- pour toute composante connexe C de $f_2 \circ f_1 \circ h(\Pi(\partial D_0)) \cap V_\alpha$ qui ne rencontre pas l'arête α , on a $f_3(C) \cap \alpha = \emptyset$.
- si \tilde{C}_1 est une composante connexe de $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) - \Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$ qui contient l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 et qui est contenue dans une face dans \mathcal{F}_h , alors $f_3(\Pi(\tilde{C}_1)) \subset U_0$.

Notons D une face dans \mathcal{F}_h à distance $i < 2g-2$ d'une face exceptionnelle maximale pour h . On va montrer que, pour tout domaine fondamental D' dans \mathcal{D} et toute composante connexe \tilde{C} de $D' \cap \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0)$, on a :

$$\tilde{f}_3(\tilde{C}) \cap D \subset \tilde{U}_{0,D}.$$

Si la face D' n'est pas adjacente à D , comme $\tilde{f}_3(\tilde{C})$ est inclus dans l'ensemble des faces adjacentes à D' , on a : $\tilde{f}_3(\tilde{C}) \cap D = \emptyset$. D'après le lemme 6.33, les faces adjacentes à D sont :

- soit de type $(i-1, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$;
- soit à distance $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) + 1$ de la face D_0 ;
- soit dans \mathcal{F}_h .

Dans les deux premiers cas, les faces en question ne rencontrent pas $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0)$. Par conséquent, il suffit de considérer les deux cas suivants :

- la face D' appartient à \mathcal{F}_h et est adjacente à D ;
- $D' = D$.

Dans le premier cas, notant $\tilde{\alpha} = D \cap D'$ et $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ le relevé de $V_{\Pi(\tilde{\alpha})}$ qui rencontre $\tilde{\alpha}$, remarquons que tout point de \tilde{C} qui ne rencontre pas $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ a une image qui ne rencontre pas D . De plus, par construction de f_3 , toute composante connexe de $\tilde{C} \cap \tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ qui ne rencontre pas $\tilde{\alpha}$ a une image par \tilde{f}_3 qui ne rencontre pas le domaine fondamental D . Notons \tilde{C}_1 une composante connexe de $\tilde{C} \cap \tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ qui rencontre $\tilde{\alpha}$ et notons \tilde{C}'_1 la composante connexe de $\tilde{V}_{\tilde{\alpha}}$ qui contient \tilde{C}_1 . La composante connexe \tilde{C}'_1 a nécessairement ses deux extrémités incluses dans $\tilde{U}_{0,D}$ d'après les propriétés vérifiées par $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}$. Par conséquent, l'ensemble $\tilde{f}_3(\tilde{C}_1)$ est inclus dans l'ensemble $\tilde{f}_3(\tilde{C}'_1)$ qui est lui-même inclus dans $\tilde{U}_{0,D}$, ce qui démontre le résultat souhaité dans le premier cas. Dans le deuxième cas, le même type de raisonnement implique que $\tilde{f}_3(\tilde{C}) \cap D \subset \tilde{U}_{0,D}$.

Enfin, on considère un homéomorphisme f_4 dans $\text{Homeo}_0(S)$ supporté dans la réunion des V_α qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'homéomorphisme f_4 préserve globalement $\Pi(\partial D_0)$;
- pour toute composante connexe \tilde{C} de $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) - \Pi^{-1}(\Pi(\partial D_0))$ incluse dans une face de \mathcal{F}_h à distance $2g-2$ d'une face exceptionnelle maximale, on a : $\tilde{f}_4(\tilde{C}) \subset \Pi^{-1}(U_0)$;
- $f_4(U_0) \subset U_0$.

L'homéomorphisme $\eta = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ vérifie alors la condition suivante, pour toute face D dans \mathcal{F}_h :

$$\tilde{f}_4 \circ \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1(\partial D_0) \cap D \subset \Pi^{-1}(U_0).$$

De plus, on a :

$$\left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{f}_4 \circ \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) \neq \emptyset \right\} = \left\{ D \in \mathcal{D}, D \cap \tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) \neq \emptyset \right\}$$

donc, pour montrer le lemme, il suffit de montrer que tout domaine fondamental dans \mathcal{D} rencontré par $\tilde{f}_3 \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0)$ est à distance au plus $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0))$ de D_0 et n'est pas de type $(i, \text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)))$ pour $0 \leq i \leq 2g - 2$. Soit D un domaine fondamental dans \mathcal{D} . Si \tilde{C} est une composante connexe de $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D$ qui ne contient pas l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 , alors l'ensemble $\tilde{f}_3(\tilde{C})$ ne rencontre que des domaines fondamentaux dans \mathcal{D} que rencontre $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0)$. Si \tilde{C} désigne une composante connexe de $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}(\partial D_0) \cap D$ qui contient l'image par l'homéomorphisme $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}$ d'un sommet du polygone ∂D_0 , alors soit l'homéomorphisme \tilde{h} ne vérifie pas les hypothèses du lemme 6.39, auquel cas l'affirmation précédente reste vraie, soit il vérifie les hypothèses de ce lemme auquel cas il suffit d'appliquer ce lemme pour conclure. \square

Nous allons maintenant achever la démonstration du lemme 6.29. Posons $M = \text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0))$. D'après les lemmes 6.36 et 6.38, on voit que, quitte à composer l'homéomorphisme f par $8g - 3$ homéomorphismes à support chacun dans l'intérieur de l'un des disques de \mathcal{U} , on peut supposer que l'homéomorphisme f vérifie les propriétés suivantes :

- $f(p) \notin \Pi(\partial D_0)$;
- l'ensemble $\tilde{f}(D_0)$ ne rencontre pas les faces de type (i, M) pour tout indice $i \in [0, 2g - 2]$;
- pour tout domaine fondamental D dans \mathcal{F}_f (défini juste avant le lemme 6.38), l'ensemble $\tilde{f}(\partial D_0) \cap D$ est inclus dans $\tilde{U}_{0,D}$, où $\tilde{U}_{0,D}$ est le relevé de U_0 qui rencontre D , rencontre une face exceptionnelle maximale et ne rencontre que des domaines fondamentaux de \mathcal{D} à distance plus petite que M de D_0 .

Deux composantes connexes distinctes ξ_1 et ξ_2 de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ sont dites *adjacentes* si $\bar{\xi}_1 \cap \bar{\xi}_2$ est un segment qui n'est pas réduit à un point. Deux composantes connexes ξ_1 et ξ_2 de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ sont dites *presque adjacentes* s'il existe une composante connexe ξ de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ distincte de ξ_1 et de ξ_2 qui est adjacente à ξ_1 et à ξ_2 . Une telle composante connexe ξ est alors unique : on l'appellera la *face d'adjacence* de ξ_1 et de ξ_2 .

Dans le cas où toute composante connexe de $\tilde{f}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(U_0)$ qui contient l'image par l'homéomorphisme \tilde{f} d'un sommet du polygone ∂D_0 évite les faces exceptionnelles maximales pour f , on note \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $f(\Pi(\partial D_0)) \cap \mathring{U}_0$ dont les extrémités appartiennent toutes soit à une même composante connexe de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$, soit à l'intérieur d'un segment de la forme $\partial U_0 \cap \overline{\xi_1 \cup \xi_2}$, où ξ_1 et ξ_2 sont des composantes connexes de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ adjacentes, soit à l'intérieur d'un segment de la forme $\partial U_0 \cap \overline{\xi_1 \cup \xi \cup \xi_2}$, où ξ_1 et ξ_2 sont des composantes connexes de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ presque adjacentes de face d'adjacence ξ . Dans le cas où il existe une composante connexe \tilde{C}_1 de $\tilde{f}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(U_0)$ qui contient l'image par l'homéomorphisme \tilde{f} d'un sommet \tilde{p} du polygone ∂D_0 qui rencontre une face exceptionnelle maximale pour f (une telle composante connexe est alors unique d'après le lemme 6.39), l'ensemble \mathcal{C} est la réunion de l'ensemble précédent avec le singleton $\Pi(\tilde{C}_1)$.

On considère alors un homéomorphisme h supporté dans \mathring{U}_0 qui vérifie les propriétés suivantes :

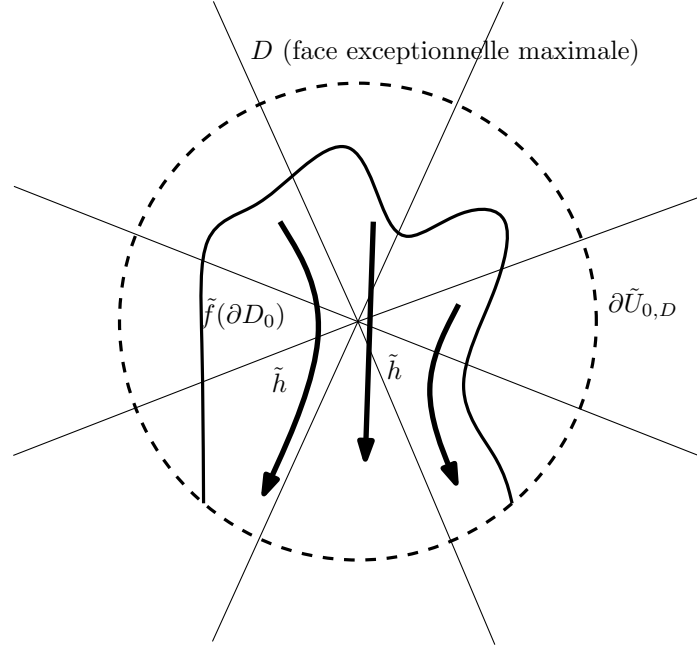


FIGURE 6.13 – Fin de la preuve du lemme 6.29

- pour toute composante connexe C dans \mathcal{C} dont les extrémités appartiennent à une même face ou à deux faces adjacentes, $h(C)$ est inclus dans l'intérieur de la réunion des adhérences des composantes connexes de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ que rencontrent les extrémités de C ;
- pour toute composante connexe C dans \mathcal{C} dont les extrémités à deux composantes connexes ξ_1 et ξ_2 de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ presque adjacentes et à leur face d'adjacence ξ , alors $h(C) \subset \overset{\circ}{k}$, avec $k = \overline{\xi_1} \cup \overline{\xi_2} \cup \overline{\xi}$.
- l'homéomorphisme h fixe toute composante connexe de $f(\Pi(\partial D_0)) \cap U_0$ qui ne contient pas un élément de \mathcal{C} .

Nous affirmons qu'alors $\text{el}_{D_0}(\tilde{h} \circ \tilde{f}(D_0)) \leq \text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) - 1 = M - 1$ ce qui conclut la démonstration du lemme 6.29.

Les faces à distance M de D_0 sont de deux types : elles sont soit exceptionnelles maximales, soit de type $(0, M)$. Nous allons montrer que l'ensemble $\tilde{h} \circ \tilde{f}(D_0)$ ne rencontre ni les unes, ni les autres.

Tout d'abord, pour un point \tilde{y} de $\tilde{f}(\partial D_0)$ qui n'appartient pas à $\Pi^{-1}(\overset{\circ}{U}_0)$, on a $\tilde{h}(\tilde{y}) = \tilde{y}$ et le point \tilde{y} n'appartient ni à une face exceptionnelle maximale pour f ni à une face de type $(0, M)$ vues les propriétés vérifiées par f . Ainsi, le point $\tilde{h}(\tilde{y})$ ne rencontre pas de domaine fondamental dans \mathcal{D} à distance M de D_0 .

Soit \tilde{C} une composante connexe de $\tilde{f}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(U_0)$ qui ne contient pas l'image par \tilde{f} d'un sommet de ∂D_0 .

Soit D une face exceptionnelle maximale pour f . Montrons que $D \cap \tilde{h}(\tilde{C}) = \emptyset$. Si le relevé \tilde{U}_0 du disque U_0 qui contient \tilde{C} ne rencontre pas D alors cette dernière propriété est vérifiée. Supposons maintenant que le relevé de disque U_0 qui contient \tilde{C} rencontre D . On reprend les notations du lemme 6.33. D'après ce lemme, les faces D_i^j , pour $1 \leq i \leq 2g - 2$ et $j \in \{1, 2\}$, appartiennent à \mathcal{F}_f . D'après les propriétés vérifiées

par l'homéomorphisme f , la composante connexe \tilde{C} a nécessairement ses extrémités incluses dans D_{2g-1}^1 , D_{2g-1}^2 ou $D_{2g}^1 = D_{2g}^2$. Or, les composantes connexes $\Pi(\mathring{D}_{2g-1}^1)$ et $\Pi(\mathring{D}_{2g-1}^2)$ de $U_0 - \Pi(\partial D_0)$ sont presque adjacentes de face d'adjacence $\Pi(\mathring{D}_{2g}^1)$. Il s'ensuit l'inclusion suivante : $\tilde{h}(\tilde{C}) \subset D_{2g-1}^1 \cup D_{2g-1}^2 \cup D_{2g}^1$. En particulier : $\tilde{h}(\tilde{C}) \cap D = \emptyset$.

Soit D un domaine fondamental dans \mathcal{D} de type $(0, M)$. Montrons que $\tilde{h}(\tilde{C}) \cap D = \emptyset$. D'après les conditions vérifiées par \tilde{f} , l'ensemble \tilde{C} ne rencontre pas D . La seule possibilité pour que $\tilde{h}(\tilde{C})$ rencontre D est la suivante : les deux extrémités de \tilde{C} appartiennent à deux domaines fondamentaux distincts adjacents à D . Mais alors ces deux domaines fondamentaux seraient à distance $M - 1$ de D_0 (ils ne peuvent pas être à distance $M + 1$ de D_0 par définition de M), ce qui contredirait le fait que le domaine fondamental D est de type $(0, M)$.

Il reste à traiter le cas d'une composante connexe \tilde{C} de $\tilde{f}(\partial D_0) \cap \Pi^{-1}(U_0)$ qui contient l'image par \tilde{f} d'un sommet du polygone ∂D_0 . Dans le cas où aucune composante connexe de ce type ne rencontre une face exceptionnelle maximale, il n'y a pas de difficulté particulière. Dans le cas contraire, il s'agit d'utiliser le lemme 6.39 pour avoir une expression explicite des domaines fondamentaux rencontré par l'image par \tilde{h} de telles composantes connexes. On constate alors que ces faces ne sont pas maximales pour \tilde{f} .

Ceci conclut la preuve du lemme 6.29. \square

6.7.3 Preuve du lemme 6.30

Preuve du lemme 6.30. La démonstration de ce lemme est tout à fait analogue à celle du lemme 6.28. Soient β et γ des courbes fermées simples homotopes de S qui sont homotopiquement non triviales. On note $l(\gamma, \beta)$ le nombre de composantes connexes de $\Pi^{-1}(\beta)$ que rencontre une composante connexe de $\Pi^{-1}(\gamma)$. Notons α une arête dans A et α' une courbe fermée simple isotope à α et disjointe de α . On note $S_{\alpha'}$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de α' et S_{α} le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de α de sorte que $\mathring{S}_{\alpha'} \cup \mathring{S}_{\alpha} = S$. On fixe un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$ avec $\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \leq 4g$. Tout au long de la preuve, η désignera une constante positive qui sera fixée par la suite. Nous utiliserons le résultat suivant, qui découle du lemme 6.8 appliqué à des voisinages respectifs de S_{α} et de $S_{\alpha'}$: il existe $\lambda_{\eta} > 0$ tel que, pour tout homéomorphisme h dans $\text{Homeo}_0(S_{\alpha})$ ou dans $\text{Homeo}_0(S_{\alpha'})$ avec $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}(D_0)) \leq \eta$, on a $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h) \leq \lambda_{\eta}$.

On va procéder comme suit. En composant par au plus $16g$ homéomorphismes de longueur de fragmentation (par rapport à \mathcal{U}) inférieure ou égale à λ_{η} , on obtient un homéomorphisme f_1 qui envoie la courbe α sur une courbe disjointe de α et incluse dans $\mathring{S}_{\alpha'}$. Ensuite, après composition par un homéomorphisme supporté dans $S_{\alpha'}$ qui coïncide avec f_1^{-1} sur un voisinage de $f_1(\alpha)$ et de longueur de fragmentation majorée par λ_{η} , on obtient un homéomorphisme f_2 qui vaut l'identité sur un voisinage de α et isotope à l'identité relativement à α . En composant par au plus trois homéomorphismes à support dans S_{α} ou dans $S_{\alpha'}$ et de longueur de fragmentation majorée par λ_{η} , on obtient un homéomorphisme f_3 qui fixe un voisinage du bord de S_{α} et isotope à l'identité relativement à ce bord. L'homéomorphisme f_3 s'écrit alors comme produit

d'un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S_\alpha)$ et d'un homéomorphisme dans $\text{Homeo}_0(S_{\alpha'})$ à support disjoints. Le résultat précédent appliqué à ces deux homéomorphismes nous assure que la longueur de fragmentation de f_3 est plus petite que $2\lambda_\eta$. Il faudra bien sûr choisir η suffisamment grand pour que le raisonnement précédent marche.

Précisons ce qui précède. Notons α_1 et α_2 (respectivement α'_1 et α'_2) les deux composantes connexes du bord de S_α (respectivement de $S_{\alpha'}$). Pour deux ensembles disjoints A et B de \tilde{S} , on note $\delta(A, B)$ le nombre de composantes connexes de $\Pi^{-1}(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_1 \cup \alpha'_2)$ disjointes de A et de B qui séparent A et B . Notons $M(f)$ le maximum des quantités $\delta(\tilde{S}', \tilde{\alpha})$, où \tilde{S}' est une composante connexe de $\Pi^{-1}(S_\alpha)$ ou de $\Pi^{-1}(S_{\alpha'})$ qui rencontre $\tilde{f}(\tilde{\alpha})$. Comme on a par hypothèse $\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \leq 4g$, alors $M(f) \leq 16g$. Remarquons que, si \tilde{S}' est une composante connexe de $\Pi^{-1}(S_\alpha)$ ou de $\Pi^{-1}(S_{\alpha'})$ telle que $\delta(\tilde{S}', \tilde{\alpha}) = M(f)$, alors toutes les composantes connexes de $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) \cap \tilde{S}'$ ont leurs extrémités dans une même composante connexe de $\partial\tilde{S}'$. Notons $S' = \Pi(\tilde{S}')$ et S'' la surface S_α si $S' = S_{\alpha'}$ ou la surface $S_{\alpha'}$ si $S' = S_\alpha$. Notons h_1 un homéomorphisme supporté dans S' qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}_1(D_0)) \leq 4g$;
- pour toute composante connexe C de $f(\alpha) \cap S'$ qui a ses extrémités dans une même composante connexe de $\partial S'$ et homotope à un chemin tracé sur le bord de S' , on a $h_1(C) \subset S''$.

Ces deux conditions sont compatibles car $\text{el}_{D_0}(\tilde{f}(D_0)) \leq 4g$. Remarquons que l'on aura alors $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}_1 \circ \tilde{f}(D_0)) \leq 8g$ et $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h_1) \leq \lambda_\eta$ si $\eta \geq 4g$. De plus, pour toute composante connexe \tilde{S}' de $\Pi^{-1}(S')$ avec $d(\tilde{\alpha}, \tilde{S}') = M(f)$ et toute composante connexe \tilde{C} de $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) \cap \tilde{S}'$, on aura $\tilde{h}_1(\tilde{C}) \subset \Pi^{-1}(S'')$. Maintenant, on considère un homéomorphisme h_2 supporté dans S'' qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}_2(D_0)) \leq 8g$;
- pour toute composante connexe C de $h_1 \circ f(\alpha) \cap S''$ qui a ses extrémités dans une même composante connexe de $\partial S''$ et homotope à un chemin tracé sur le bord de S'' , on a : $h_2(C) \subset S'$.

Ces deux conditions sont compatibles car $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}_1 \circ \tilde{f}(\partial D_0)) \leq 8g$. Remarquons que l'on aura alors $\text{el}_{D_0}(\tilde{h}_2 \circ \tilde{h}_1 \circ \tilde{f}(\partial D_0)) \leq 16g$ et $\text{Frag}_{\mathcal{U}}(h_2) \leq \lambda_\eta$ si $\eta \geq 16g$. De plus, on aura $M(h_2 \circ h_1 \circ f) \leq M(f) - 2$. On réitère cette procédure au plus $8g$ fois de sorte que, après composition de l'homéomorphisme f par au plus $16g$ homéomorphismes de longueur de fragmentation inférieure ou égale à λ_η (en prenant $\eta \geq 2^{8g}.4g$), on obtient un homéomorphisme f_1 qui envoie la courbe α sur une courbe disjointe de α et qui vérifie de plus l'inégalité suivante :

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{f}_1(D_0)) \leq 2^{8g+1}.4g.$$

Après composition par quatre homéomorphismes de longueur de fragmentation inférieure ou égale à λ_η (quitte à prendre $\eta \geq 2^{8g+4}.4g$), comme indiqué au début de cette preuve, on obtient un homéomorphisme f_3 qui fixe un voisinage de ∂S_α et isotope à l'identité relativement à ce voisinage avec :

$$\text{el}_{D_0}(\tilde{f}_3(D_0)) \leq 2^{8g+5}.4g.$$

Comme indiqué au début de cette preuve, il suffit donc de prendre $\eta \geq 2^{8g+5}.4g$ pour conclure la démonstration du lemme 6.30. \square

6.7.4 Preuve des lemmes combinatoires

Preuve du lemme 6.32. Décrivons l'algorithme de Dehn que l'on va utiliser dans la suite de la preuve. On considère un mot réduit m d'éléments de \mathcal{G} . À chaque étape, on cherche un sous-mot f de m de longueur strictement supérieure à $2g$ qui est inclus dans un mot $f.\lambda'$ de Λ (un tel mot f sera dit *simplifiable*) et qui est de longueur maximale parmi de tels mots (on dira alors de plus qu'il est *maximal* dans m). Le mot λ' sera appelé le *mot complémentaire* de f . On remplace alors dans m le sous-mot f par le mot λ'^{-1} qui est de longueur strictement plus petite (les mots de Λ sont de longueur $4g$) et on effectue s'il y a lieu les simplifications de groupe libre pour obtenir un nouveau mot réduit. D'après un théorème de Dehn (voir [38]), un mot réduit représente l'élément trivial dans $\Pi_1(S)$ si et seulement si, après application d'un nombre fini d'étapes de cet algorithme, on obtient le mot vide.

Donnons quelques faits généraux sur le groupe $\Pi_1(S)$ qui se vérifient immédiatement et seront utilisés par la suite.

Fait 1 Étant données deux lettres a et b dans \mathcal{G} , il existe au plus un mot de Λ dont les deux premières lettres sont données par ab . Les autres mots de Λ qui contiennent le mot ab sont obtenus par permutation cyclique de celui-ci.

Fait 2 Étant donnée une lettre a dans \mathcal{G} , il existe exactement deux mots dans Λ dont la dernière lettre (respectivement la première lettre) est a . Si l'on note b et c les avant-dernières lettres (respectivement les deuxièmes lettres) de ces mots, alors le mot $b^{-1}c$ n'est un sous-mot d'aucun mot de Λ .

Fait 3 Étant données deux lettres a et b dans \mathcal{G} telles que le mot ab est contenu dans un mot de Λ , notons m_1 le mot de Λ de première lettre b mais dont la dernière lettre l_1 est distincte de a et m_2 le mot de Λ de dernière lettre a mais dont la première lettre l_2 n'est pas b . Alors $l_2^{-1}l_1^{-1}$ n'est un sous-mot d'aucun mot de Λ .

On va se servir du fait 2 de la manière suivante : si à un moment donné de l'algorithme de Dehn on rencontre un mot réduit de la forme $macm'$, où acm' est un sous-mot d'un mot de Λ , ma est un mot simplifiable et mac n'est pas simplifiable, alors après remplacement de ma par l'inverse de son mot complémentaire, on obtient un mot de la forme $m''cm'$, où $m''c$ n'est contenu dans aucun mot de Λ . Quant au fait 3, on s'en servira dans la situation suivante : supposons que l'on rencontre au cours de l'algorithme un mot de la forme $mabm'$, où ab est un sous-mot d'un mot de Λ et ma comme bm' sont simplifiables. Supposons de plus que les mots mab et abm' ne sont pas simplifiables (ce ne sont pas des sous-mots de mots de Λ). Alors après remplacement des mots ma et bm' par l'inverse de leurs mots complémentaires, on obtient un mot de la forme $nl_2^{-1}l_1^{-1}n'$ et les mots $nl_2^{-1}l_1^{-1}$ et $l_2^{-1}l_1^{-1}n'$ ne sont contenus dans aucun sous-mot de mots de Λ .

Revenons à la démonstration du lemme. Puisque D est une face exceptionnelle, il existe deux mots géodésiques γ_1 et γ_2 de dernières lettres distinctes tels que $\gamma_1(D_0) = D$ et $\gamma_2(D_0) = D$. Nous allons montrer que l'un d'entre eux vérifie nécessairement la première propriété donnée par le lemme et les deux vérifient l'une des propriétés du lemme. De plus, si les deux vérifient la première propriété du lemme il existe un mot $l_1 \dots l_{4g}$ de Λ tel que les $2g$ dernières lettres de γ_1 sont $l_1 \dots l_{2g}$ et les $2g$ dernières lettres

de γ_2 sont $l_{4g}^{-1} \dots l_{2g+1}^{-1}$. Ces deux résultats impliquent toutes les affirmations du lemme.

Prenons donc deux mots géodésiques γ_1 et γ_2 de dernières lettres distinctes tels que $\gamma_1(D_0) = D$ et $\gamma_2(D_0) = D$. Le mot $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est donc réduit mais représente l'élément trivial de $\Pi_1(S)$. On va appliquer l'algorithme précédent à ce mot pour démontrer le lemme. Comme les mots γ_1 et γ_2 sont géodésiques, ils ne contiennent pas de mots simplifiables. Considérons un mot simplifiable λ' maximal pour $\gamma_1\gamma_2^{-1}$. Notons λ_3 le mot complémentaire de λ' . Alors on peut décomposer le mot λ' sous la forme $\lambda' = \lambda_1\lambda_2$ avec :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \hat{\gamma}_1\lambda_1 \\ \gamma_2 = \hat{\gamma}_2\lambda_2^{-1} \end{cases} .$$

D'après la remarque précédente, les mots λ_1 et λ_2 sont non-vides. Les mots $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ sont géodésiques. De plus, comme les mots γ_1 et γ_2 sont tous deux géodésiques, les mots λ_1 et λ_2 ne sont pas simplifiables. Ainsi, si la longueur de λ' est $4g$, les mots λ_1 et λ_2 sont tous deux de longueur $2g$. On va maintenant montrer le fait suivant.

Fait Un tel mot λ' est nécessairement de longueur supérieure ou égale à $4g - 1$.

Supposons dans un premier temps que la longueur de λ' est inférieure ou égale à $4g - 3$ (i.e. la longueur de λ_3 est supérieure ou égale à 3). Après application de la première étape de l'algorithme, on obtient le mot $\hat{\gamma}_1\lambda_3^{-1}\hat{\gamma}_2^{-1}$ qui est réduit par maximalité de λ' . De plus, la concaténation du mot λ_3^{-1} avec la première lettre du mot $\hat{\gamma}_2^{-1}$ n'est contenue dans aucun mot de Λ . Il en est de même de la concaténation de la dernière lettre du mot $\hat{\gamma}_1$ avec le mot λ_3^{-1} . Supposons par récurrence qu'à un moment donné de l'algorithme, on obtienne un mot réduit de la forme suivante :

$$\tilde{\gamma}_1\eta_1\eta_2 \dots \eta_k\tilde{\gamma}_2^{-1},$$

où $k \geq 1$, les mots $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont géodésiques et les mots η_i sont chacun inclus dans un mot de Λ , sont de longueur inférieure ou égale à $2g - 1$ et vérifient les propriétés suivantes :

1. les mots η_1 et η_k sont de longueur supérieure ou égale à 2 et, s'ils sont tous deux de longueur 2, alors $k > 1$;
2. pour tout indice i entre 1 et $k - 1$, la concaténation de la dernière lettre de η_i avec la première lettre de η_{i+1} n'est contenue dans aucun sous-mot d'un mot de Λ ;
3. la concaténation du mot η_k avec la première lettre du mot $\tilde{\gamma}_2^{-1}$ n'est contenue dans aucun mot de Λ . Il en est de même de la concaténation de la dernière lettre du mot $\tilde{\gamma}_1$ avec le mot η_1 .

Appliquons une nouvelle étape de l'algorithme. Un sous-mot λ' simplifiable du mot ci-dessus est nécessairement inclus dans l'un des mots $\tilde{\gamma}_1\eta_1$ ou $\eta_k\tilde{\gamma}_2^{-1}$ par la deuxième propriété ci-dessus et en utilisant le fait que chacun des η_i est de longueur inférieure ou égale à $2g - 1$. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'un tel sous-mot est inclus dans $\tilde{\gamma}_1\eta_1$. En combinant le fait 1 avec la troisième propriété ci-dessus, on obtient que la dernière lettre a du mot $\lambda' = \lambda'_1 a$ est aussi la première lettre du mot $\eta_1 = a\eta'_1$. Comme le mot $\tilde{\gamma}_1$ est géodésique, il ne contient pas de sous-mot simplifiable, donc le mot λ'_1 , qu'il contient, est de longueur $2g$. Après application de l'algorithme, on obtient le mot :

$$\tilde{\gamma}_1'\tilde{\lambda}^{-1}\eta'_1\eta_2 \dots \eta_k\tilde{\gamma}_2^{-1},$$

où $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}'_1 \lambda'_1$ et $\tilde{\lambda}$ est le mot complémentaire de λ' . Les mots $\tilde{\gamma}'_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ obtenus dans cette expression sont bien géodésiques. Le mot $\tilde{\lambda}$, de longueur $2g - 1$, est bien de longueur strictement inférieure à $2g$ et supérieure ou égale à 2. De plus, si $k = 1$, la longueur de η_1 est supérieure ou égale à 3 donc la longueur de η'_1 est supérieure ou égale à 2. Le fait 2 implique que la concaténation de la dernière lettre de $\tilde{\lambda}^{-1}$ et de la première lettre de η'_1 n'est contenue dans aucun mot de Λ . Enfin, la troisième propriété est vérifiée pour cette décomposition : notant l la dernière lettre de $\tilde{\gamma}'_1$, si le mot $l\tilde{\lambda}^{-1}$ était un sous-mot d'un mot de Λ , alors, d'après le fait 1, la première lettre du mot λ' serait l^{-1} , ce qui rentrerait en contradiction avec le fait que le mot $\tilde{\gamma}_1$ est réduit. À chaque étape de l'algorithme, la somme des longueurs des mots géodésiques qui commencent et qui terminent cette décomposition décroît strictement. Par conséquent, après application de l'algorithme un nombre fini de fois, on obtient un mot de la forme suivante :

$$\tilde{\gamma}_1 \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \tilde{\gamma}_2^{-1},$$

où $k \geq 1$, qui vérifie les trois propriétés précédemment décrites ainsi que la propriété suivante : la longueur de $\tilde{\gamma}_1$ comme la longueur de $\tilde{\gamma}_2$ sont strictement inférieures à $2g$. Dans ce cas, on peut voir en reprenant le raisonnement précédent que le mot considéré ne contient pas de sous-mot de mot de Λ de longueur supérieure ou égale à $2g + 1$. Il y a contradiction.

Revenons à la première étape de l'algorithme. Le mot λ' considéré est donc de longueur $4g - 2$ ou $4g - 1$, s'il n'est pas de longueur $4g$. Supposons maintenant que la longueur de λ' soit $4g - 2$. On veut aboutir à une contradiction.

Après la première étape de l'algorithme, on obtient un mot réduit de la forme $\hat{\gamma}_1 \lambda_3 \hat{\gamma}_2^{-1}$, où la longueur de $\lambda_3 = ab$ est 2. Comme précédemment, la dernière lettre de $\hat{\gamma}_1$ concaténée avec le mot λ_3 n'est contenue dans aucun mot de Λ . Il en est de même de la concaténation du mot λ_3 avec la première lettre de $\hat{\gamma}_2^{-1}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que, lors de la deuxième étape de l'algorithme, on choisit un sous-mot d'un mot de Λ de la forme $b\tilde{\lambda}_2$, où le mot $\tilde{\lambda}_2$ est constitué des $2g$ premières lettres du mot $\hat{\gamma}_2^{-1}$. On reprend les notations du fait 3. Après application d'une étape de l'algorithme, on obtient un mot de la forme $\hat{\gamma}_1 a \eta_1 \tilde{\gamma}_2^{-1}$, où la longueur de η_1 est $2g - 1$ et la première lettre de η_1 est l_1^{-1} . Tant que les sous-mots choisis lors de l'algorithme ne rencontrent pas $\hat{\gamma}_1$, on obtient des mots de la forme $\hat{\gamma}_1 a \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \tilde{\gamma}_2^{-1}$, où les propriétés 1) et 2) précédemment décrites ainsi que la propriété 3) pour $\tilde{\gamma}_2$ uniquement sont vérifiées et où la première lettre de η_1 est l_1^{-1} . Après la première étape où l'on remplace un sous-mot qui rencontre $\hat{\gamma}_1$, on obtient un mot de la forme :

$$\tilde{\gamma}_1 \eta_0 \eta_1 \dots \eta_k \tilde{\gamma}_2^{-1},$$

où la dernière lettre du mot η_0 est l_2^{-1} et la première lettre de η_1 est l_1^{-1} . Le fait 3 implique que l'on est ramené à la situation précédente. On aboutit donc à une contradiction.

Enfin, abordons le cas où la longueur de λ' est $4g - 1$. L'un des deux mots géodésiques γ_1 ou γ_2 vérifie alors nécessairement la première propriété du lemme. Après itération de l'algorithme, par des raisonnements analogues à ceux faits précédemment, on voit que le deuxième mot géodésique vérifie la deuxième propriété du lemme. \square

Preuve du lemme 6.33. Les cas $j = 1$ et $j = 2$ sont symétriques : on suppose que $j = 1$. Fixons un indice $2 \leq i' \leq 2g - 1$ (penser que $i' = 2g - i$). Par récurrence sur la longueur de

m , on va montrer que, pour tout mot réduit m de longueur inférieure ou égale à $2g - i'$ de première lettre distincte de $l_{i'+1}$ et de $l_{i'}^{-1}$:

- le mot $\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}m$ est géodésique ;
- le domaine fondamental $\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}m(D_0)$ n'est pas exceptionnel.

Supposons la propriété vraie pour un mot m comme ci-dessus de longueur strictement inférieure à $2g - i'$. Considérons une lettre l de \mathcal{G} distincte de l'inverse de la dernière lettre de m (ou distincte de $l_{i'+1}$ et de $l_{i'}^{-1}$ si le mot m est vide). Comme le domaine fondamental $\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}m(D_0)$ n'est pas une face exceptionnelle, alors :

$$d_{\mathcal{D}}(\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}ml(D_0), D_0) = d_{\mathcal{D}}(\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}m(D_0), D_0) + 1$$

et le mot $\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}ml$ est géodésique. De plus, comme la longueur de ml est inférieure ou égale à $2g - i'$, le mot $\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}ml$ n'est pas de l'une des formes décrites par le lemme 6.32. Par conséquent, la face $\gamma'l_1l_2 \dots l_{i'}ml(D_0)$ n'est pas exceptionnelle. Ceci permet de conclure la preuve du lemme 6.33. \square

Preuve du lemme 6.34. La partie génératrice du groupe $\Pi_1(S)$ donnée par les automorphismes qui envoient le domaine fondamental D_1 sur un domaine fondamental de \mathcal{D} adjacent à D_1 est $\gamma_1\mathcal{G}\gamma_1^{-1}$. D'après le lemme 6.32, il existe un mot géodésique en les lettres de $\gamma_1\mathcal{G}\gamma_1^{-1}$ qui a pour $2g$ dernières lettres

$$(\gamma_1\lambda_{2g}^{-1}\gamma_1^{-1})(\gamma_1\lambda_{2g-1}^{-1}\gamma_1^{-1}) \dots (\gamma_1\lambda_1^{-1}\gamma_1^{-1}),$$

où $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{4g} \in \Lambda$, qui envoie la face D_1 sur la face D_0 . Ainsi, dans le groupe $\Pi_1(S)$, on a l'égalité suivante :

$$\gamma_1^{-1} = \gamma_1\eta^{-1}\lambda_{2g}^{-1}\lambda_{2g-1}^{-1} \dots \lambda_1^{-1}\gamma_1^{-1},$$

où $\eta^{-1}\lambda_{2g}^{-1}\lambda_{2g-1}^{-1} \dots \lambda_1^{-1}$ est un mot géodésique en les éléments de \mathcal{G} . Notons γ le mot $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{2g}\eta$. On a alors, dans le groupe $\Pi_1(S)$: $\gamma = \gamma_1$. Ainsi, le mot géodésique γ satisfait aux conditions requises. Le deuxième point du lemme provient de ce qui précède et du lemme 6.31. \square

Preuve du lemme 6.35. Notons $s(D_0)$ et $s'(D_0)$, où s et s' sont des automorphismes dans \mathcal{G} , les faces adjacentes à la face D_0 qui contiennent le point \tilde{p} . Supposons que $d_{\mathcal{D}}(D_0, D_1) = l(h)$. Si l'on avait la relation $d_{\mathcal{D}}(s(D_0), D_1) = d_{\mathcal{D}}(D_0, D_1) + 1$, alors on aurait $d_{\mathcal{D}}(D_0, s^{-1}(D_1)) > l(h)$ et le sommet $s^{-1}(\tilde{p})$ de ∂D_0 vérifierait :

$$\tilde{h}(s^{-1}(\tilde{p})) = s^{-1}(\tilde{h}(\tilde{p})) \in s^{-1}(D_1)$$

ce qui est exclu par définition de $l(h)$. Ainsi, nécessairement, on a :

$$d_{\mathcal{D}}(s(D_0), D_1) = d_{\mathcal{D}}(s'(D_0), D_1) = d_{\mathcal{D}}(D_0, D_1) - 1.$$

La face D_0 est donc exceptionnelle vis-à-vis de D_1 . D'après le lemme 6.32, il existe un mot $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{4g}$ dans Λ tel que :

$$\begin{cases} \gamma = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{2g}\gamma' = \lambda_{4g}^{-1} \dots \lambda_{2g+1}^{-1}\gamma' \\ \gamma(D_0) = D_1 \end{cases}.$$

De plus, d'après ce même lemme, le point \tilde{p} est commun aux faces $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i(D_0)$ et $\lambda_{4g}^{-1}\lambda_{4g-1}\ldots\lambda_{4g-i+1}^{-1}(D_0)$ pour un entier i entre 0 et $2g$. Fixons un entier i entre 0 et $2g$. Le point \tilde{p} est un sommet du polygone $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i(D_0)$ donc le point $\lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}^{-1}\ldots\lambda_1^{-1}(\tilde{p})$ appartient au polygone ∂D_0 . On obtient ainsi $4g$ points deux à deux distincts qui sont des sommets du polygone ∂D_0 : on a obtenu ainsi tous les sommets du polygone ∂D_0 . De plus, si $i \geq 1$:

$$\begin{cases} \tilde{h}(\lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}^{-1}\ldots\lambda_1^{-1}(\tilde{p})) \in \lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\ldots\lambda_{2g}\gamma'(D_0) \\ \tilde{h}(\lambda_{4g-i+1}\lambda_{4g-i+2}\ldots\lambda_{4g}(\tilde{p})) \in \lambda_{4g-i}^{-1}\lambda_{4g-i-1}^{-1}\ldots\lambda_{2g+1}^{-1}\gamma'(D_0) \end{cases}$$

donc l'image par l'homéomorphisme \tilde{h} des sommets du polygone ∂D_0 distincts de \tilde{p} appartiennent à l'intérieur de domaines fondamentaux D dans \mathcal{D} qui vérifient la propriété suivante : la face D_0 n'est pas exceptionnelle vis-à-vis de D , d'après le lemme 6.32. Cette constatation nous permet d'obtenir l'implication réciproque et l'unicité de la face D_1 . \square

6.8 Des éléments de distorsion de croissance d'orbite rapide

L'objet de cette section est la démonstration du théorème 6.6.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer le théorème 6.6 pour les suites $(v_n)_{n \geq 1}$ qui vérifient la propriété supplémentaire suivante

1. la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante ;
2. la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Montrons ceci. Supposant démontré le théorème 6.6 pour les suites strictement croissantes, si $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite quelconque, il suffit d'appliquer le théorème à la suite $(\sup_{k \leq n} v_k + 1 - \frac{1}{2^n})_{n \geq 1}$ pour obtenir le théorème en toute généralité. Supposons maintenant le théorème montré uniquement pour les suites qui vérifient les deux conditions supplémentaires ci-dessus et montrons qu'il est valable pour les suites strictement croissantes. Considérons une suite strictement croissante $(v_n)_{n \geq 1}$ telle que la suite $(\frac{v_n}{n})_n$ converge vers 0. On note alors A l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^2 de l'ensemble

$$\{(n, t), n \geq 1 \text{ et } t \leq v_n\}$$

et $w_n = \sup \{t \in \mathbb{R}, (n, t) \in A\}$. La suite $(w_n)_{n \geq 1}$ vérifie alors les deux propriétés supplémentaires ci-dessus et vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{n} = 0$. Il suffit alors d'appliquer le théorème à cette suite pour l'obtenir pour la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

On suppose dans la suite que $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite qui vérifie les hypothèses du théorème 6.6 ainsi que les deux conditions ci-dessus.

On note $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ et α la courbe $\{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{A}$. L'homéomorphisme f de $\text{Homeo}_0(\mathbb{A}, \partial\mathbb{A})$ que l'on va construire vérifiera la condition suivante :

$$\exists x \in \mathring{\mathbb{A}}, v_n + \frac{1}{2^n} \geq p_2(\tilde{f}^n(x)) - p_2(x) \geq v_n$$

où $p_2 : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la projection. Puisque f est à support compact, ceci nous garantira que la condition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \delta(\tilde{f}^n([0, 1] \times [0, 1])) \geq v_n$$

est satisfaite. On va maintenant considérer un plongement particulier de \mathbb{R} dans $\mathring{\mathbb{A}}$:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} &\rightarrow \mathring{\mathbb{A}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-1, 1) \\ x &\mapsto (x \bmod 1, g(x)) \end{aligned}$$

où g est une fonction continue strictement croissante dont la limite en $+\infty$ est $\frac{1}{2}$ et la limite en $-\infty$ est $-\frac{1}{2}$. On identifie un voisinage tubulaire T de $L(\mathbb{R})$ à la bande $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, où la droite réelle \mathbb{R} est identifiée à la courbe $L(\mathbb{R})$ via l'application L de sorte que, pour tout entier j le chemin $\{j\} \times [-1, 1]$ est inclus dans α . On considère un homéomorphisme h de la droite L , identifiée à \mathbb{R} , qui vérifie les conditions suivantes :

1. l'application $x \mapsto h(x) - x$ est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - x = 0$;
2. l'homéomorphisme h coïncide avec l'identité sur $(-\infty, -1]$;
3. pour tout entier naturel i et tout entier naturel n , on a : $h^n(i) \notin \mathbb{N}$;
4. pour tout entier naturel n , on a : $h^n(0) = v_n + \frac{\epsilon_n}{2^n}$, où ϵ_n vaut 1 si v_n est un entier et est nul dans les autres cas.

Le " ϵ_n " est ajouté dans la quatrième condition pour rendre celle-ci compatible avec la troisième condition. On considère l'homéomorphisme défini sur T par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1] \\ (x, t) &\mapsto ((1 - |t|)h(x) + |t|x, t) \end{aligned}$$

qui se prolonge continûment en un homéomorphisme de $\text{Homeo}_0(\mathbb{A}, \partial\mathbb{A})$ noté encore, par abus, f . Ce prolongement est possible grâce à la cinquième condition vérifiée par h qui nous assure que l'homéomorphisme f est proche de l'identité lorsque l'on se rapproche du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{\frac{1}{2}\}$. La troisième condition vérifiée par h nous assure que, pour tout couple d'entiers positifs i et j et pour tout entier positif n , la courbe $f^n(\{i\} \times (-1, 1))$ est transverse à la courbe $\{j\} \times (-1, 1)$. Pour une courbe β de l'anneau \mathbb{A} , on note $l(\beta, \alpha)$ le nombre de composantes connexes de $\Pi^{-1}(\alpha)$ que rencontre un relevé de β . Pour montrer que l'homéomorphisme f est un élément de distorsion, la proposition centrale est la suivante :

Proposition 6.40. *Fixons l , un entier strictement positif et notons $\lambda_l = l(f^l(\alpha), \alpha)$. Il existe deux homéomorphismes g_1 et g_2 dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{A}, \partial\mathbb{A})$ supportés respectivement dans le complémentaire de α et dans un voisinage tubulaire de α tels que :*

$$l((g_2 \circ g_1)^{\lambda_l - 1}(f^l(\alpha)), \alpha) = 1.$$

Voyons tout d'abord pourquoi cette propriété implique le théorème 6.6.

Preuve du théorème 6.6. On considère le recouvrement ouvert \mathcal{U} de \mathbb{A} construit au début de la section 6.5. D'après le lemme 6.23, on a :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g_1) \leq 6$$

et

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}(g_2) \leq 6.$$

Remarque En regardant bien la preuve du lemme 6.23, il se trouve qu'on pourrait même majorer ces deux quantités par 3. Au vu de la construction de g_2 ci-dessous, on pourrait même faire en sorte que g_2 soit supporté dans un disque donné de \mathcal{U} . Par contre, g_1 ne peut pas a priori être choisi à support dans l'un des disques de \mathcal{U} . En effet, rappelons que l'homéomorphisme g_1 dépend du l choisi : on notera $g_{1,l}$ le g_1 qui correspond à f^l . Il se peut alors que la réunion des supports des $g_{1,l}$ ne soit incluse dans aucun disque fermé plongé dans l'anneau ouvert.

D'après ce même lemme 6.23, on a :

$$\text{Frag}_{\mathcal{U}}((g_2 \circ g_1)^{\lambda_l-1} \circ f^l) \leq 6.$$

Rappelons que $a_l = a_{\mathcal{U}}(f^l)$ est le minimum des quantités $m \log(k)$ où il existe un ensemble de cardinal k d'homéomorphismes supportés chacun dans l'un des ouverts de \mathcal{U} telle que f^l s'écrive comme composé de m homéomorphismes de cet ensemble. Les majorations de la longueur de fragmentation ci-dessus impliquent que :

$$f^l = (h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_{12})^{\lambda_l-1} \circ h_{13} \circ \dots \circ h_{18},$$

où chacun des homéomorphismes h_i est supporté dans l'un des disques de \mathcal{U} .

On a donc, pour tout entier positif l :

$$a_l \leq (12\lambda_l - 6) \log(18).$$

Or :

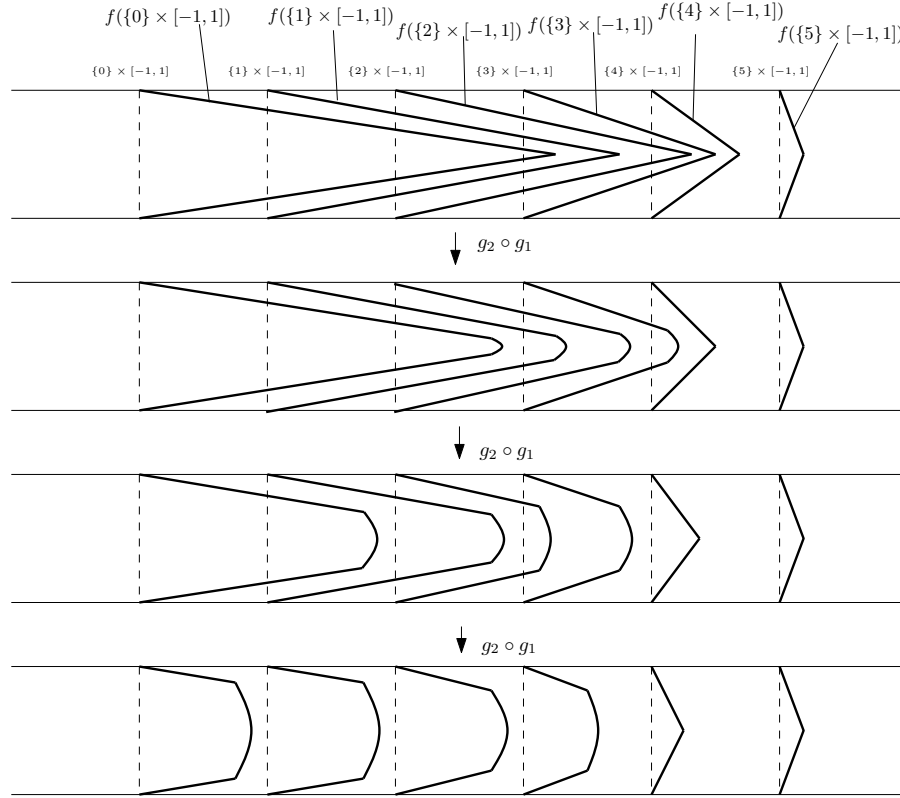
$$\frac{\lambda_l}{l} = \frac{l(f^l(\alpha), \alpha)}{l} \leq \frac{v_l + \frac{1}{2^l}}{l},$$

où le membre de gauche de l'inégalité converge vers 0. Par conséquent, la suite $(\frac{a_l}{l})_{l \in \mathbb{N} - \{0\}}$ converge vers 0. D'après la proposition 6.16, l'homéomorphisme f est un élément de distorsion de $\text{Homeo}_0(\mathbb{A}, \partial\mathbb{A})$. Remarquons qu'ici, l'utilisation de la proposition 6.16 est essentielle puisque l'hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n) \cdot \log(\text{Frag}_{\mathcal{U}}(f^n))}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n \log(\lambda_n)}{n} = 0$$

du théorème 6.5 n'est pas nécessairement vérifiée. □

Preuve de la proposition 6.40. On note $g = f^l$ et $\lambda = \lambda_l = l(f^l(\alpha), \alpha)$. Dans ce qui suit, tout se passera dans le voisinage tubulaire T de la ligne L qui est identifié à $\mathbb{R} \times [-1, 1]$. On peut donc « oublier » l'anneau \mathbb{A} . Donnons brièvement l'idée de la preuve qui va suivre. Comme la courbe $g(\{0\} \times (-1, 1))$ a une largeur par rapport à α égale à λ , on n'a pas le choix : dans le produit $(g_2 \circ g_1)^{\lambda-1}$, chaque facteur doit pousser cette courbe vers la gauche et on doit franchir une courbe de la forme $\{i\} \times (-1, 1)$ à chaque étape (sous l'action de chaque facteur). Les courbes $g(\{i\} \times (-1, 1))$ sont moins dilatées et doivent revenir à leur place en λ étapes également. On doit alors les « mettre en attente » pour qu'elles ne reviennent pas trop vite : si elles reviennent avant l'instant λ , elles seront

FIGURE 6.14 – Représentation de l'action de $g_2 \circ g_1$

trop déportées sur la gauche, ce que l'on veut éviter. Sur la figure 6.14, on a représenté l'action de $g_2 \circ g_1$ sur $g(\alpha)$ dans un cas particulier.

On considère l'entier positif N minimal tel que

$$g(N, 0) \in [N, N+1) \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times [-1, 1] \subset \mathbb{A}.$$

Dans le cas de la figure 6.14, cet entier vaut 4, par exemple. Prenons un réel ϵ dans $(0, \frac{1}{2})$ tel que, pour tout entier i dans $[0, N]$, toutes les composantes connexes de $g(\alpha) \cap ([i - \epsilon, i + \epsilon] \times [-1, 1] - g(\{i\} \times (-1, 1)))$ joignent les deux composantes du bord de $[i - \epsilon, i + \epsilon] \times (-1, 1)$. La propriété de transversalité vérifiée par f nous permet de trouver un tel réel ϵ . Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout entier i dans $[0, N]$, toutes les composantes connexes de

$$g(\alpha) \cap [i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times [-1, 1]$$

sont incluses dans :

$$[i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times (-1 + \eta, 1 - \eta).$$

Commençons par construire l'homéomorphisme g_2 . On prend pour g_2 un homéomorphisme qui vérifie les propriétés suivantes :

1. l'homéomorphisme g_2 est à support inclus dans $\bigcup_{0 \leq i \leq N} (i - \epsilon, i + \epsilon) \times (-1, 1)$.
2. en notant P_i la composante connexe de $[i - \epsilon, i + \epsilon] \times [-1, 1] - g(\{i\} \times [-1, 1])$ qui contient $\{i - \epsilon\} \times [-1, 1]$ et K_i un disque topologique fermé inclus dans P_i qui contient les composantes connexes de

$$(g(\alpha) \cap [i - \epsilon, i + \frac{\epsilon}{2}] \times (-1, 1)) - g(\{i\} \times [-1, 1])$$

on a :

$$\forall i, g_2(K_i) \subset [i - \epsilon, i - \frac{\epsilon}{2}] \times (-1 + \eta, 1 - \eta).$$

3. l'homéomorphisme g_2 préserve globalement chaque composante connexe de $g(\alpha) \cap [i - \epsilon, i + \epsilon] \times (-1, 1)$.

Avant de construire g_1 , nous aurons besoin préliminairement de construire une suite d'entiers $(n_i)_{0 \leq i \leq N}$. Notons, pour un entier i entre 0 et N :

$$A_i = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [0, N], \left\{ \begin{array}{l} g(\{j\} \times [-1, 1]) \cap \{i\} \times [-1, 1] \neq \emptyset \\ g(\{j\} \times [-1, 1]) \cap \{i+1\} \times [-1, 1] = \emptyset \end{array} \right\} \right\}.$$

Notons $i_0 = \max \{i, \{i\} \times [-1, 1] \cap g(\{0\} \times (-1, 1)) \neq \emptyset\}$. Les ensembles $A_0, A_1, \dots, A_{i_0-1}$ seront tous vides mais nous allons voir que, pour tout entier $N \geq m \geq i_0$, l'ensemble A_m sera non-vide. Dans le cas de la figure 6.14, les ensembles A_0, A_1 et A_2 sont vides, $A_3 = \{0, 1\}$ et $A_4 = \{2, 3, 4\}$. En toute généralité, la famille $(A_{i_0}, A_{i_0+1}, \dots, A_N)$ constituera une partition de $\{0, 1, \dots, N\}$ qui est ordonnée au sens où, si $i_0 \leq m \leq m' \leq N$, alors tous les entiers de A_m seront plus petits que chacun des entiers de $A_{m'}$. Montrons que si, pour un entier i entre 0 et $N-1$, l'ensemble A_i n'est pas vide, alors l'ensemble A_{i+1} n'est pas vide non plus. Remarquons que, pour tout entier j dans l'intervalle $[0, N]$:

$$l(g(\{j\} \times (-1, 1)), \alpha) = \lfloor h^l(j) \rfloor - j + 1$$

par construction de f . Comme l'application $x \mapsto h^l(x) - x$ est décroissante par construction de h , alors l'application

$$j \mapsto l(g(\{j\} \times (-1, 1)), \alpha)$$

est décroissante sur $[0, N] \cap \mathbb{N}$. En particulier, $i_0 = \lambda - 1$. Posons $j = \max(A_i)$. Comme

$$l(g(\{j+1\} \times (-1, 1)), \alpha) \leq l(g(\{j\} \times (-1, 1)), \alpha),$$

alors la courbe $g(\{j+1\} \times (-1, 1))$ ne rencontre pas la courbe $\{i+2\} \times [-1, 1]$ donc l'entier $j+1$ appartient à A_{i+1} qui n'est donc pas vide. Pour un entier i entre i_0 et N , on note :

$$A_i = \{j(i), j(i) + 1, \dots, j(i+1) - 1\}.$$

On définit par récurrence une suite finie d'entiers $(n_i)_{0 \leq i \leq N}$ de la manière suivante :

- si $i < i_0$, on pose $n_i = 1$.
- sinon, supposant les n_k , pour $k < i$, construits, on pose :

$$n_i = \lambda - \sum_{k=j(i+1)-1}^{i-1} n_k.$$

L'entier n_i va représenter le nombre d'itérations de $g_2 \circ g_1$ nécessaire pour une courbe d'extrémité proche de $\{i+1\} \times (-1, 1)$ pour franchir la courbe $\{i\} \times (-1, 1)$. Pour $0 \leq j \leq N$, notons $i(j)$ l'unique entier tel que $j \in A_{i(j)}$. Après un nombre d'itérations de $g_2 \circ g_1$ inférieur ou égal à $n_{i(j)}$, la courbe $g(\{j\} \times (-1, 1))$ va franchir $\{i(j)\} \times (-1, 1)$ puis, après $n_{i(j)-1}$ itérations, elle franchira la courbe $\{i(j)-1\} \times (-1, 1)$ et ainsi de suite... Par exemple, dans le cas de la figure 6.14, on aura $n_0 = n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$ et $n_4 = 4$. Montrons par récurrence que, pour tout entier $i \geq i_0$:

$$\sum_{k=j(i)}^{i-1} n_k < \lambda.$$

Cela montrera au passage que tous les entiers n_i sont strictement positifs. Si $i = i_0$, alors, pour $j < i_0$, l'ensemble A_j est vide et on a :

$$l(g(\{0\} \times [-1, 1]), \alpha) = i_0 + 1 \leq \lambda$$

par définition de λ . Ainsi :

$$\lambda - \sum_{k=0}^{i_0-1} n_k = \lambda - i_0 > 0$$

et la propriété est vraie au rang i_0 . Supposons la propriété vraie pour des rangs k entre i_0 et i donné entre 0 et $N - 1$. On a alors :

$$\sum_{k=j(i+1)}^i n_k = \lambda - \sum_{k=j(i+1)-1}^{i-1} n_k + \sum_{k=j(i+1)}^{i-1} n_k = \lambda - n_{j(i+1)-1} < \lambda$$

car $n_{j(i+1)-1} > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. La propriété souhaitée est donc démontrée.

Pour un entier j entre 0 et N , remarquons que, par construction, les composantes connexes de

$$g(\{j\} \times [-1, 1]) \cap \bigcup_{0 \leq i \leq N} [i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times (-1, 1)$$

joignent toutes deux composantes connexes distinctes du bord de

$$\bigcup_{0 \leq i \leq N} [i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times (-1, 1)$$

sauf une (qui correspond au plus grand i) que nous noterons C_j . Si l'on note $i(j)$, l'unique entier tel que l'entier j appartient à $A_{i(j)}$, alors :

$$C_j \subset [i(j) + \frac{\epsilon}{4}, i(j) + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times (-1, 1).$$

On est maintenant en mesure de construire un homéomorphisme g_1 qui convient. On considère un homéomorphisme g_1 supporté dans

$$\bigcup_{0 \leq i \leq N} (i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}) \times [-1, 1] \subset \mathbb{R} \times [-1, 1] \subset \mathbb{A}$$

qui vérifie les propriétés suivantes pour tout entier i entre 0 et N :

1. l'homéomorphisme g_1 préserve globalement chacune des composantes connexes de $g(\alpha) \cap [i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times [-1, 1]$ qui joignent les deux composantes connexes du bord de $[i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times (-1, 1)$;

2. pour tout entier j de A_i et tout entier $r < \lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k$, on a

$$g_1^r(C_j) \cap (i - \epsilon, i + \epsilon) \times [-1, 1] = C_j \cap (i - \epsilon, i + \epsilon) \times [-1, 1];$$

3. pour tout entier j de A_i , on a l'inclusion :

$$g_1^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k} (C_j) \subset K_i$$

(remarquer que ces conditions sont compatibles puisque $\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k$ croît avec j et,

de plus, $\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k \leq n_i$ par définition de n_i);

4. on a l'inclusion suivante :

$$g_1^{n_i}([i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \frac{\epsilon}{2}] \times (-1 + \eta, 1 - \eta)) \subset [i + \frac{\epsilon}{4}, i + \frac{\epsilon}{2}] \times (-1 + \eta, 1 - \eta) \cap K_i;$$

5. pour une composante connexe C de $g(\alpha) \cap [i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \epsilon] \times (-1, 1)$ qui joint les deux composantes connexes du bord de $[i + \frac{\epsilon}{4}, i + 1 - \epsilon] \times (-1, 1)$, on a :

$$\forall r < n_i, g_1^r(C) \cap (i - \epsilon, i + \epsilon) \times [-1, 1] = C \cap (i - \epsilon, i + \epsilon) \times [-1, 1];$$

6. pour tout entier $r < n_i$ l'ensemble $g_1^r([i + 1 - \epsilon, i + 1 - \frac{\epsilon}{4}] \times [-1, 1])$ ne rencontre pas le carré $[i, i + \epsilon] \times [-1, 1]$.

Les deuxième et troisième conditions ci-dessus déterminent les vitesses auxquelles on repousse les morceaux C_j : la troisième condition signifie que le morceau C_j doit être repoussé dans un K_i au bout du temps $\lambda - \sum_{k=j+1}^{i-1} n_k$ mais la deuxième condition impose qu'il ne soit pas repoussé avant cet instant-là. Les conditions 4, 5 et 6 permettent d'imposer le temps exact nécessaire pour traverser $[i, i + 1] \times (-1, 1)$.

Maintenant, nous allons montrer que, pour des homéomorphismes g_1 et g_2 vérifiant les propriétés données ci-dessus, on a :

$$l((g_2 \circ g_1)^{\lambda-1}(g(\alpha)), \alpha) = 1.$$

On fixe un entier j entre 0 et N et on pose $i = i(j)$. On note α_j la courbe $\{j\} \times [-1, 1]$. On va montrer que, pour $j' \in [j - 1, i - 1]$ et pour $\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k > r \geq \lambda - \sum_{k=j}^{j'+1} n_k$, on a :

$$l((g_2 \circ g_1)^r \circ g(\alpha_j), \alpha) = l(g(\alpha_j), \alpha) - (i - j' - 1).$$

D'après les deux premières propriétés de g_1 et la troisième propriété de g_2 , on a, pour tout entier r strictement positif et strictement inférieur à $\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k$:

$$\begin{cases} (g_2 \circ g_1)^r(g(\alpha_j) \cap [0, i + \epsilon] \times [-1, 1]) = g(\alpha_j) \cap [0, i + \epsilon] \times [-1, 1] \\ (g_2 \circ g_1)^r(g(\alpha_j)) = g_1^r(g(\alpha_j)) \end{cases},$$

d'où la propriété ci-dessus pour $j' = i - 1$. En conséquence, on obtient aussi que :

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k - 1} \circ g(\alpha_j) = g_1^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k} (g(\alpha_j)).$$

La troisième propriété de l'homéomorphisme g_1 implique que l'intersection de l'ensemble ci-dessus avec $[i - \epsilon, +\infty) \times [-1, 1]$ est inclus dans K_i . Par conséquent, la deuxième propriété vérifiée par l'homéomorphisme g_2 implique que :

$$(g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k} \circ g(\alpha_j) \subset [j, i - \frac{\epsilon}{2}] \times [-1 + \eta, 1 - \eta].$$

Toute la partie extrême de la courbe a été ramenée dans $[i - \epsilon, i - \frac{\epsilon}{2}] \times (-1, 1)$. Le reste n'a pas bougé. En effet :

$$(g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k} (g(\alpha_j) \cap [j, i - \epsilon] \times [-1, 1]) = g(\alpha_j) \cap [j, i - \epsilon] \times [-1, 1].$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned} l((g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k} \circ g(\alpha_j), \alpha) &= i - j \\ &= l(g(\alpha_j), \alpha) - 1. \end{aligned}$$

Il va suffir maintenant d'itérer la preuve que l'on vient de faire pour conclure. Supposons que, pour un entier j' compris entre $j + 1$ et $i - 1$, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} \circ g(\alpha_j) \subset [j, j' + 1 - \frac{\epsilon}{2}] \times (-1 + \eta, 1 - \eta) \\ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} (g(\alpha_j) \cap [j, j' + 1 - \epsilon] \times [-1, 1]) = g(\alpha_j) \cap [j, j' + 1 - \epsilon] \times [-1, 1] \end{array} \right. .$$

On a vu que cette propriété était vraie pour $j' = i - 1$. La supposant vraie au rang j' , nous allons montrer qu'elle est aussi vraie au rang $j' - 1$ et montrer aussi que, sous cette hypothèse, pour $\lambda - \sum_{k=j}^{j'-1} n_k > r > \lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k$, on a :

$$l((g_2 \circ g_1)^r \circ g(\alpha_j), \alpha) = l(g(\alpha_j), \alpha) - (i - j');$$

D'après les cinquièmes et sixièmes propriétés de l'homéomorphisme g_1 et la troisième propriété de l'homéomorphisme g_2 , on a, pour un entier $0 \leq r < n_{j'}$:

$$(g_2 \circ g_1)^r \circ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} (g(\alpha_j) \cap [0, j' + \epsilon] \times [-1, 1]) = g(\alpha_j) \cap [0, j' + \epsilon] \times [-1, 1]$$

et

$$(g_2 \circ g_1)^r \circ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} \circ g(\alpha_j) = g_1^r(g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} (g(\alpha_j)).$$

Par conséquent, on a :

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_1)^{n_{j'-1}} \circ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} (g(\alpha_j)) = g_1^{n_{j'}}(g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} (g(\alpha_j))$$

donc, d'après la quatrième propriété vérifiée par l'homéomorphisme g_1 , l'intersection de cet ensemble avec $[j' + \epsilon, +\infty) \times [-1, 1]$ est inclus dans l'ensemble $K_{j'}$. D'après la deuxième propriété vérifiée par l'homéomorphisme g_2 , on a alors :

$$(g_2 \circ g_1)^{n_j} \circ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{j'} n_k} \circ g(\alpha_j) \subset [j, j' - \frac{\epsilon}{2}] \times (-1 + \eta, 1 - \eta)$$

et, de plus :

$$(g_2 \circ g_1)^{n_{j'}} \circ (g_2 \circ g_1)^{\lambda - \sum_{k=j}^{i-1} n_k} (g(\alpha_j) \cap [j, j' - \epsilon] \times [-1, 1]) = g(\alpha_j) \cap [j, j' - \epsilon] \times [-1, 1].$$

Ceci conclut la récurrence. On montre alors comme précédemment que, pour $\lambda > r > \lambda - n_j$, on a :

$$(g_2 \circ g_1)^r \circ g(\alpha_j) = g_1^{r-\lambda+n_j} (g_2 \circ g_1)^{\lambda-n_j} (g(\alpha_j)).$$

ce qui implique en particulier que :

$$l((g_2 \circ g_1)^{\lambda-1} \circ g(\alpha_j), \alpha) = 1,$$

ce que l'on voulait démontrer. \square

6.9 Généralisation des résultats

On se propose dans cette section de généraliser rapidement les résultats précédents dans deux directions. Tout d'abord, on pourrait regarder d'autres vitesses de croissance des mots que la vitesse linéaire. En outre, on peut aussi considérer des familles finies d'éléments au lieu de regarder un seul élément et définir une notion de distorsion adaptée. On obtient alors des résultats analogues à ceux obtenus précédemment. Dans toute la suite, on fixe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. Commençons par une définition :

Définition 6.2. Soient G un groupe et g un élément de g . On dit que l'élément g est $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -distordu dans G si et seulement si il existe une partie finie \mathcal{G} de G telle que :

- l'élément g appartient au groupe engendré par \mathcal{G} ;
- la limite inférieure de la suite $(\frac{l_{\mathcal{G}}(g^n)}{w_n})$ est nulle.

Cette notion de distorsion n'a pas d'intérêt si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{n} = +\infty$: dans ce cas, tous les éléments de G sont $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -distordus. De plus, cette notion ne dépend que de la classe d'équivalence de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la relation d'équivalence suivante :

$$(\omega_n) \equiv (\xi_n) \Leftrightarrow \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{C} \xi_n \leq \omega_n \leq C \xi_n.$$

On peut alors montrer les théorèmes suivants :

Proposition 6.41. Notons D , un domaine fondamental de \tilde{S} pour l'action de $\Pi_1(S)$. Si un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$) est $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -distordu dans $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$), alors :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(\tilde{f}^n(D))}{w_n} = 0.$$

Théorème 6.42. Soit f un homéomorphisme de $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement de $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$). Si :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(\tilde{f}^n(D)) \log(\delta(\tilde{f}^n(D)))}{w_n} = 0,$$

alors f est $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -distordu dans $\text{Homeo}_0(S)$ (respectivement dans $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$).

Théorème 6.43. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$. Alors il existe un homéomorphisme f de $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1], \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0, 1\})$ tel que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \delta(\tilde{f}^n([0, 1] \times [0, 1])) \geq v_n$;
2. l'homéomorphisme f est $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -distordu dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1], \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0, 1\})$.

Pour, un entier k , on note \mathbb{F}_k le groupe libre à k éléments. On note a_1, a_2, \dots, a_k les générateurs standards de ce groupe et A l'ensemble de ces générateurs.

Définition 6.3. Soit G un groupe de type fini engendré par une partie finie \mathcal{G} . Un k -uplet (f_1, f_2, \dots, f_k) est dit distordu si l'application $\mathbb{F}_k \rightarrow G$ qui envoie le générateur a_k sur f_k n'est pas une quasi-isométrie pour les distances d_A et d_G . Plus généralement, pour un groupe G quelconque, un k -uplet (f_1, f_2, \dots, f_k) est dit distordu s'il existe un sous-groupe de G de type fini qui contient tous les éléments f_i dans lequel ce k -uplet est distordu.

On peut alors démontrer le théorème suivant pour une surface S compacte :

Théorème 6.44. Notons D , un domaine fondamental de \tilde{S} pour l'action de $\Pi_1(S)$. Soit (f_1, f_2, \dots, f_k) un k -uplet d'homéomorphismes de S . Supposons qu'il existe une suite de mots $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en les f_i dont la suite des longueurs $(l(m_n))_n$ tend vers $+\infty$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(m_n(D)) \log(\delta(m_n(D)))}{l(m_n)} = 0.$$

Alors le k -uplet (f_1, f_2, \dots, f_k) est distordu.

Troisième partie

Morphismes de groupes entre groupes d'homéomorphismes

Sommaire

7	Actions de gros groupes sur le cercle	141
7.1	Introduction et notations	141
7.2	Preuve du théorème 7.1.1	143

Chapitre 7

Actions de gros groupes sur le cercle

7.1 Introduction et notations

Dans un article de 1962 (voir [53]), Whittaker montre qu'étant donnée une variété compacte M , tout automorphisme de groupe de $\text{Homeo}(M)$ est un automorphisme intérieur, c'est-à-dire de la forme :

$$f \rightarrow h \circ f \circ h^{-1},$$

où h est un homéomorphisme de M . Dans ce contexte, une question naturelle est de se demander ce qu'il se passe si l'on remplace dans l'hypothèse "isomorphisme" par "morphisme". Nous allons donner une réponse à cette question dans le cas où la variété considérée est le cercle S^1 . La technique de preuve donne aussi un résultat de rigidité sur les actions de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur le cercle. Nous verrons le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes du cercle via l'application qui, à une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homéomorphisme du cercle $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui à un point x associe $\frac{ax+b}{cx+d}$. Remarquons qu'il s'agit de l'action naturelle du groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ qui s'identifie au cercle.

Notons s un élément d'ordre 2 du groupe $\text{Homeo}_0(S^1)$. Un tel élément est conjugué soit à une réflexion, soit à la rotation d'angle π . Notons τ_s l'endomorphisme du groupe $\text{Homeo}_0(S^1)$ qui, à tout homéomorphisme qui conserve l'orientation, associe l'identité et, à tout homéomorphisme qui renverse l'orientation, associe l'élément s .

Le théorème principal que nous allons démontrer, qui est dû à Matsumoto (voir [41]), est le suivant :

Théorème 7.1. *Tout morphisme de groupe de $\text{Homeo}_0(S^1)$ ou $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\text{Homeo}_0(S^1)$ est soit trivial, soit conjugué à l'inclusion. De plus, tout endomorphisme de groupe de $\text{Homeo}(S^1)$ est soit nul, soit un automorphisme intérieur, soit un morphisme de la forme τ_s , où s est un élément d'ordre 2 du groupe $\text{Homeo}_0(S^1)$.*

Remarque. Si l'on ne regarde que les morphismes de groupes injectifs, le théorème ci-dessus se généralise à tout sous-groupe G des homéomorphismes du cercle préservant

l'orientation qui vérifie les conditions suivantes :

- le groupe G est transitif sur les triplets de points bien ordonnés (voir la définition 7.1 ci-dessous).
- le groupe G contient un élément d'ordre fini distinct de l'identité.
- si l'on note G_x le stabilisateur dans G d'un point x du cercle, l'application en cohomologie bornée $H_b^2(G) \rightarrow H_b^2(G_x)$ est nulle.

Les groupes $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ et $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont les seuls que je connais qui vérifient ces trois conditions.

La deuxième partie du théorème se déduit de la première comme nous allons le voir maintenant :

Démonstration. Notons φ un tel endomorphisme. Le noyau de φ est distingué dans $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$. Il est donc soit égal à $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$, soit égal à $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$, soit trivial. Dans le premier cas, le morphisme φ est nul. Dans le deuxième cas, si h_1 et h_2 sont deux homéomorphismes du cercle qui renversent l'orientation, alors les composées $h_1 \circ h_2^{-1}$ et h_1^2 , qui conservent l'orientation, sont dans le noyau de ce morphisme : on a donc $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ et $\varphi(h_1)^2 = \text{Id}$. L'image est constituée d'un seul élément s d'ordre 2 et le morphisme φ est égal à τ_s .

Plaçons nous dans le troisième cas. Le sous-groupe $\varphi^{-1}(\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1))$ est distingué dans le groupe des homéomorphismes du cercle et est donc soit trivial, soit égal à $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$, soit égal à $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$: on distingue trois sous-cas. Dans le premier sous-cas, l'image est constituée d'un seul élément, ce qui n'est pas possible. Dans le deuxième sous-cas, d'après la première partie du théorème, on a nécessairement :

$$\varphi(\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)) = \text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1).$$

Ainsi, si g est un homéomorphisme qui renverse l'orientation, il existe un homéomorphisme f dans $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ tel que $\varphi(f) = \varphi(g)$. L'homéomorphisme gf^{-1} renverse donc l'orientation et est dans le noyau du morphisme φ . Or tout sous-groupe distingué de $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ engendré par un homéomorphisme qui renverse l'orientation est égal à $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$. Ainsi, le morphisme de groupes φ est nul : on aboutit à une contradiction. Dans le dernier sous-cas, en utilisant la première partie du théorème, on voit que le morphisme φ est un isomorphisme. En appliquant le résultat de Whittaker rappelé plus haut, on obtient que le morphisme φ est un automorphisme intérieur. \square

La preuve du théorème 7.1 va faire intervenir la classe d'Euler bornée de l'action d'un groupe sur le cercle : nous allons rappeler les principes de cette théorie et énoncer les résultats qui vont nous être utiles. Ceux ci sont dus à Ghys. On renvoie au chapitre 6 pour plus d'informations sur la classe d'Euler bornée.

On peut associer à tout groupe G son deuxième groupe de cohomologie bornée $H_b^2(G, \mathbb{Z})$, qui est un groupe abélien et on peut associer à tout morphisme de groupe $G \rightarrow H$ un morphisme $H_b^2(H, \mathbb{Z}) \rightarrow H_b^2(G, \mathbb{Z})$. Le groupe $H_b^2(\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z} et possède un générateur privilégié (qui correspond à l'extension centrale induite par le revêtement universel de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$: voir [45]). Une action d'un groupe G sur le cercle induit un morphisme de groupe $H_b^2(\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z}) \rightarrow H_b^2(G, \mathbb{Z})$ et l'image du générateur privilégié de $H_b^2(\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z})$ par ce morphisme est appelée la *classe*

d'Euler bornée de cette action du groupe G . Le résultat que l'on utilisera au cours de la preuve du théorème est le suivant :

Théorème 7.2 (Ghys). *Une action d'un groupe G sur le cercle possède un point fixe (c'est-à-dire que ce point est fixé par tous les éléments du groupe G) si et seulement si la classe d'Euler bornée de cette action est nulle.*

La classe d'Euler bornée est en fait un véritable analogue du nombre de rotation pour les actions de groupe sur le cercle. Pour plus d'information sur le sujet, on conseille une nouvelle fois la lecture du chapitre 6 de [27].

7.2 Preuve du théorème 7.1.1

Notons G le groupe $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ ou $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Notons φ un morphisme de groupe de G vers $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^1)$ non nul. Comme le groupe G est simple, ce morphisme de groupe est injectif. Pour un point x du cercle, on note G_x l'ensemble des éléments de G qui fixent le point x et on note F_x l'ensemble des points fixes de $\varphi(G_x)$. Remarquons que, si f désigne un élément du groupe G et x est un point du cercle, l'ensemble des points fixes de $\varphi(G_{f(x)})$ est aussi l'ensemble des points fixes de $\varphi(f)\varphi(G_x)\varphi(f)^{-1}$, d'où : $F_{f(x)} = \varphi(f)(F_x)$. En particulier, les fermés F_x sont deux à deux homéomorphes, par transitivité de l'action du groupe G sur le cercle.

Nous allons montrer successivement que ces ensembles sont :

- des fermés non-vides ;
- d'intérieur vide ;
- sans point d'accumulation ;
- réduits à un point.

Nous verrons aussi que ces fermés constituent une partition du cercle et que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :

- pour tout triplet de points du cercle (x, y, z) bien ordonné (voir définition 7.1), le triplet de points (F_x, F_y, F_z) est bien ordonné ;
- pour tout triplet de points du cercle (x, y, z) bien ordonné, le triplet de points (F_z, F_y, F_x) est bien ordonné.

Ici, on a confondu par abus chaque ensemble F_x avec l'unique élément qu'il contient. Toutes ces données vont nous permettre de conclure la preuve du théorème. Pour un point x du cercle, notons $\{h(x)\} = F_x$. L'application h est bijective car les fermés F_x forment une partition du cercle. Comme h soit préserve, soit renverse l'ordre de tout triplet de points du cercle, alors h envoie les intervalles ouverts du cercle sur des intervalles ouverts du cercle. Il s'ensuit que h^{-1} est continue. Puisqu'une bijection continue du cercle est un homéomorphisme, on en déduit que h est un homéomorphisme. Soit f un élément de G . Comme, pour tout point x , $F_{f(x)} = \varphi(f)(F_x)$, alors on a la relation $h \circ f = \varphi(f) \circ h$, d'où : $\varphi(f) = hf h^{-1}$.

Il suffit maintenant de vérifier les affirmations ci-dessus.

Lemme 7.3. *Les fermés F_x sont non-vides.*

Démonstration. Comme, par définition, le groupe G_x fixe un point du cercle, le morphisme au niveau des groupes de cohomologie bornée $H_b^2(\text{Homeo}_0(S^1), \mathbb{Z}) \rightarrow H_b^2(G_x, \mathbb{Z})$ induit par l'inclusion est nul d'après le théorème 7.2. D'autre part, l'application $H_b^2(\text{Homeo}_0(S^1), \mathbb{Z}) \rightarrow H_b^2(G, \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion $G_x \subset G \subset \text{Homeo}_0(S^1)$ est un isomorphisme (voir [45]). Par conséquent, le morphisme de groupe $H_b^2(G, \mathbb{Z}) \rightarrow H_b^2(G_x, \mathbb{Z})$ induit par l'inclusion est nul. Ainsi, le morphisme de groupe $H_b^2(\text{Homeo}_0(S^1), \mathbb{Z}) \rightarrow H_b^2(G_x, \mathbb{Z})$ induit par le morphisme de groupes φ restreint à G_x est nul : la classe d'Euler bornée de l'action correspondante sur le cercle est nulle. Ceci implique que l'ensemble F_x des points fixes de $\varphi(G_x)$ est non-vidé d'après le théorème 7.2. \square

Lemme 7.4. *Les fermés F_x sont deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soient x et y deux points distincts du cercle. Nous aurons besoin du lemme de fragmentation suivant :

Lemme 7.5. *Les groupes G_x et G_y engendrent G .*

Démonstration. Soit g , un élément de G . Quitte à composer l'homéomorphisme g avec un élément de G_y , on peut supposer que le point $g(y)$ est distinct du point x . Soit g_1 un élément de G_x qui envoie le point y sur le point $g(y)$. Alors l'homéomorphisme $g_2 = g_1^{-1}g$ appartient à G_y et $g = g_1 g_2$. \square

Supposons que $F_x \cap F_y \neq \emptyset$. Dans ce cas, d'après le lemme précédent, l'image du morphisme de groupes φ est constituée d'éléments qui fixent $F_x \cap F_y$. Or, cette image contient des éléments de torsion distincts de l'identité (l'image par φ des rotations d'angle rationnel) et de tels homéomorphismes sont conjugués à des rotations d'angle rationnel qui n'ont aucun point fixe : on aboutit à une contradiction. Les fermés F_x sont donc deux à deux disjoints. \square

Lemme 7.6. *Les fermés F_x sont d'intérieurs vides et sans point d'accumulation : les fermés F_x sont donc des ensembles finis de points qui ont tous même cardinal k . De plus, toute composante connexe du complémentaire de chaque ensemble F_x rencontre tous les ensembles F_y en exactement en point.*

Démonstration. Si l'un des fermés F_{x_0} est d'intérieur non-vidé alors tous les fermés F_x sont d'intérieur non-vidé, ce qui rentre en contradiction avec le fait que le cercle admet une base dénombrable d'ouverts. Ainsi, tous les fermés F_x sont d'intérieur vide.

Voyons maintenant pourquoi les fermés F_x n'ont pas de point d'accumulation. Fixons un tel fermé F_{x_0} .

Nous allons montrer que chaque composante connexe du complémentaire de F_{x_0} rencontre tous les fermés F_x pour $x \neq x_0$. Notons C une composante connexe du complémentaire de F_{x_0} et supposons que l'ensemble C ne rencontre aucun des ensembles F_x pour x distinct de x_0 . Pour un point x distinct de x_0 , on note f_x un élément de G qui envoie x_0 sur x . Nous allons alors montrer que les ensembles $\varphi(f_x)(F_{x_0} \cup C)$ sont deux à deux disjoints et d'intérieurs non-vides, ce qui est impossible, puisque le cercle a une

base dénombrable d'ouverts. Supposons que l'on puisse trouver deux points distincts x et y tels que :

$$\varphi(f_x)(F_{x_0} \cup C) \cap \varphi(f_y)(F_{x_0} \cup C) \neq \emptyset.$$

Tout d'abord, on a : $\varphi(f_x)(F_{x_0}) \cap \varphi(f_y)(F_{x_0}) = F_x \cap F_y = \emptyset$. De plus :

$$\varphi(f_x)(F_{x_0}) \cap \varphi(f_y)(C) = \varphi(f_y)(F_z \cap C) = \emptyset,$$

où z désigne le point $f_y^{-1}f_x(x_0)$ qui est distinct de x_0 . En échangeant les rôles de x et de y dans ce qui précède, on obtient aussi que :

$$\varphi(f_x)(C) \cap \varphi(f_y)(F_{x_0}) = \emptyset.$$

Du coup, nécessairement :

$$\varphi(f_x)(C) \cap \varphi(f_y)(C) \neq \emptyset.$$

Notons $g = f_x^{-1}f_y$. Cet homéomorphisme et son inverse envoient le point x_0 sur des points distincts de x_0 et, d'après ce qui précède :

$$C \cap \varphi(g)(C) \neq \emptyset.$$

Mais dans ce cas, soit un point de la frontière de $\varphi(g)(C)$ (qui est incluse dans le fermé $F_{g(x_0)}$) appartient à \overline{C} , ce qui n'est pas possible, soit un point de la frontière de $\varphi(g)^{-1}(C)$ appartient à \overline{C} , ce qui n'est pas possible non plus. Par conséquent, il existe un point y_0 du cercle tel que $F_{y_0} \cap C \neq \emptyset$. Soit x , un point du cercle distinct de x_0 et de y_0 et notons f un élément de G_{x_0} qui envoie y_0 sur x . Comme, par définition du fermé F_{x_0} , l'homéomorphisme $\varphi(f)$ fixe les points de F_{x_0} , alors cet homéomorphisme préserve globalement C . De plus, il envoie le fermé F_{y_0} sur le fermé F_x donc l'ensemble $C \cap F_{y_0}$ sur l'ensemble $C \cap F_x$ qui est donc non-vidé.

Supposons que le fermé F_{x_0} possède un point d'accumulation a . Prenons un point y distinct de x et notons C la composante connexe du complémentaire du fermé F_y qui contient le point a . Il existe une composante connexe C' du complémentaire de F_{x_0} incluse dans l'ouvert C . En particulier, l'intervalle C' ne rencontre pas le fermé F_y , d'où une contradiction avec l'affirmation précédente. \square

Définition 7.1. *On fixe une orientation du cercle. On dit qu'un triplet de points (x, y, z) du cercle est bien ordonné si, lorsque l'on parcourt le cercle dans le sens donné par l'orientation de celui-ci en partant du point x , on rencontre le point y avant de rencontrer le point z .*

Lemme 7.7. *L'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- pour tout triplet de points bien ordonnés (x, y, z) du cercle, et pour un point x' de F_x , si l'on note y' (respectivement z') le premier point de F_y (respectivement de F_z) que l'on rencontre lorsque l'on parcourt le cercle dans le sens donné par l'orientation, le triplet (x', y', z') est bien ordonné.
- pour tout triplet de points bien ordonnés (x, y, z) du cercle, et pour un point x' de F_x , si l'on note y' (respectivement z') le premier point de F_y (respectivement de F_z) que l'on rencontre lorsque l'on parcourt le cercle dans le sens donné par l'orientation, le triplet (z', y', x') est bien ordonné.

Démonstration. Le lemme revient à dire que, quitte à changer l'orientation de l'un des deux cercles considérés, la première propriété ci-dessus est vérifiée. Étant donnés deux points x et y du cercle, on note $[x, y]$ l'arc de cercle obtenu en parcourant le cercle dans le sens donné par l'orientation depuis le point x jusqu'au point y . Fixons des points p_1, p_2 et p_3 du cercle de sorte que le triplet (p_1, p_2, p_3) soit bien ordonné. Rappelons que chaque composante connexe du complémentaire d'un ensemble de la forme F_x contient pour tout point y distinct de x exactement un point de F_y : sinon, il existerait une composante connexe du complémentaire de F_y qui ne contient pas de point de F_x , ce qui n'est pas possible comme on l'a vu précédemment. Posons $F_{p_1} = \{p_1^j, 1 \leq j \leq k\}$ de sorte que les triplets $(p_1^{j-1}, p_1^j, p_1^{j+1})$ soient bien ordonnés, où les exposants sont pris modulo k (rappelons que k désigne le cardinal de chacun des ensembles F_x). On définit alors, pour $i = 2$ ou 3 et j entre 1 et k , le point p_i^j comme l'unique point de l'ensemble F_{p_i} qui appartient au segment $[p_1^j, p_1^{j+1}]$ (les exposants étant pris modulo k). Pour $i = 2$ ou 3 , on a alors la propriété suivante : pour tout entier j entre 1 et k , le point p_1^j appartient au segment $[p_2^{j-1}, p_2^j]$ (les exposants étant pris modulo k).

Quitte à changer l'orientation du cercle, on peut supposer que le triplet (p_1^1, p_2^1, p_3^1) est bien ordonné. Dans ce cas, comme, d'après le lemme 7.6, toute composante connexe du complémentaire de F_{p_i} rencontre les F_{p_j} en un unique point, alors, lorsque l'on parcourt le cercle dans le sens imposé par l'orientation en partant du point p_1^1 , on rencontre successivement les points $p_1^1, p_2^1, p_3^1, p_1^2, p_2^2, p_3^2, \dots, p_3^k$. Nous allons montrer maintenant que la première propriété énoncée ci-dessus est vérifiée. On considère un triplet bien ordonné (x_1, x_2, x_3) de points du cercle. Il existe un élément f_{x_1, x_2, x_3} de G qui envoie le point p_i sur le point x_i pour tout indice i . Rappelons que $F_{f_{x_1, x_2, x_3}(p_i)} = \varphi(f_{x_1, x_2, x_3})(F_{p_i})$. Comme l'homéomorphisme $\varphi(f_{x_1, x_2, x_3})$ préserve l'orientation, on obtient que le triplet de points (x_1^1, x_2^1, x_3^1) , où $x_i^j = \varphi(f_{x_1, x_2, x_3})(p_i^j)$, est bien ordonné. De plus, si l'on parcourt le cercle dans le sens imposé par l'orientation en partant du point x_1^1 , on rencontre successivement les points $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_3^k$. Ceci démontre l'affirmation. \square

Lemme 7.8. *La réunion des fermés F_x est le cercle. Les ensembles F_x constituent donc une partition du cercle, d'après le lemme 7.4.*

Démonstration. Notons C une composante connexe du complémentaire dans le cercle de la réunion des fermés F_x . Nous allons montrer qu'il existe un point de la frontière de C qui est inclus dans l'un des F_x , que l'on note F_{x_0} : en particulier l'ensemble C n'est pas fermé donc pas réduit à un point. Voyons pourquoi ce dernier fait implique le lemme. Pour un point x du cercle, on note f_x un homéomorphisme du cercle qui envoie le point x_0 sur le point x . Alors les ensembles $\varphi(f_x)(F_{x_0} \cup C)$ sont deux à deux disjoints et d'intérieurs non-vides (le raisonnement est analogue à celui fait pour démontrer qu'une composante connexe du complémentaire de F_{x_0} rencontre tous les fermés F_x pour $x \neq x_0$ lors de la démonstration du lemme 7.6). On aboutit à une contradiction avec le fait que le cercle admet une base dénombrable d'ouverts. Montrons maintenant le fait que nous avons admis, à savoir qu'il existe un point de la frontière de C qui est inclus dans l'un des F_x . Choisissons un point y_0 de sorte que l'adhérence de C est inclus dans le complémentaire de F_{y_0} . On note C' la composante connexe du complémentaire de F_{y_0} qui contient l'intervalle C . On rappelle que, d'après le lemme 7.6, l'intervalle C' rencontre chaque ensemble F_x suivant un point pour un point x du cercle distinct de y_0 . L'orientation du cercle fournit un ordre sur l'intervalle $S^1 - \{y_0\}$: on dira que $x < y$ si le segment $[x, y]$ ne rencontre pas le point y_0 . De même une orientation de l'intervalle C'

fournit un ordre sur C' . D'après les lemmes 7.7 et 7.4, il existe une orientation sur C' tel que l'application ξ qui, à un point x du cercle distinct de y_0 , associe le point $F_x \cap C'$ est strictement croissante. Si l'on note x_0 la borne supérieure de l'ensemble des points x de $S^1 - \{y_0\}$ tels que le point $\xi(x)$ est plus petit que les points de C , alors, nécessairement $\xi(x_0)$ est adhérent à C , ce qui démontre le fait et termine la démonstration du lemme. \square

Lemme 7.9. *Chaque ensemble F_x est réduit à un point.*

Démonstration. Notons $R_{1/3}$ la rotation du cercle d'angle $2\pi/3$. Nous allons montrer que si le cardinal k de chacun des ensembles F_x est strictement plus grand que 1, alors $\varphi(R_{1/3})^3$ est distinct de l'identité, ce qui est impossible.

Fixons un point x_0 du cercle et notons y_0 le point diamétralement opposé au point x . D'après la preuve du lemme 7.5, il existe un élément f dans G_{x_0} et un élément g dans G_{y_0} tels que $R_{1/3} = gf$. Notons $x_1 = R_{1/3}(x_0)$ et $x_2 = R_{1/3}(x_1)$. Enfin, notons :

$$\begin{cases} F_{x_i} = \{x_i^j, 0 \leq j \leq k-1\} \\ F_{y_0} = \{y_0^j, 0 \leq j \leq k-1\} \end{cases},$$

où les exposants sont choisis de sorte qu'il existe une orientation du cercle telle que, si l'on parcourt le cercle en partant du point x_0^0 , alors on rencontre successivement les points suivants dans cet ordre :

$$x_1^0, y_0^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1, \dots, x_2^{k-1}.$$

On a ici implicitement utilisé le lemme 7.7. Remarquons que, comme $\varphi(R_{1/3})(F_{x_0}) = F_{x_1}$, alors :

$$\varphi(R_{1/3})(x_0^j) \in \{x_1^j, 1 \leq j \leq k\}.$$

Par définition du fermé F_{x_0} , comme l'homéomorphisme f appartient à G_{x_0} , l'homéomorphisme $\varphi(f)$ fixe le point x_0^0 . Par conséquent, on a : $\varphi(R_{1/3})(x_0^0) = \varphi(g)(x_0^0)$. Or, l'homéomorphisme $\varphi(g)$ fixe les points de F_{y_0} : il envoie donc le point x_0^0 sur l'unique point de F_{x_1} inclus dans l'intervalle $[y_0^{k-1}, y_0^0]$ qui est x_1^0 . Sachant que :

$$\varphi(R_{1/3})(x_i^j) \in \{x_{i+1}^{j'}, 1 \leq j' \leq k\},$$

où les indices sont pris modulo 3, et que l'homéomorphisme $\varphi(R_{1/3})$ préserve l'ordre, on en déduit que :

$$\forall j \varphi(R_{1/3})(x_0^j) = x_1^j, \varphi(R_{1/3})(x_1^j) = x_2^j \text{ et } \varphi(R_{1/3})(x_2^j) = x_0^{j+1},$$

où les exposants sont pris modulo k . Il s'ensuit que, si $k > 1$:

$$x_0^0 = \varphi(R_{1/3})^3(x_0^0) = x_0^1,$$

d'où une contradiction. \square

La preuve du théorème 7.1 est donc complète.

Annexe A

Appendice : perfection locale de $\text{Diff}_0^\infty(M)$

L'objet de cet appendice est de démontrer le résultat suivant qui a été utilisé au cours de la démonstration du lemme 1 :

Théorème A.1. *Soit M , une variété compacte connexe de dimension n . Fixons un recouvrement ouvert $(U_k)_{0 \leq k \leq p}$ de M constitué d'ouverts d'adhérences difféomorphes à la boule unité de \mathbb{R}^n . Alors, pour tout voisinage Ω de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(M)$, il existe un voisinage Ω' de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(M)$ tel que, pour tout difféomorphisme f de Ω' , il existe des familles de difféomorphismes $(f_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3n}$ et $(g_{k,l})_{0 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq 3n}$ dans Ω tels que :*

$$f = \prod_{k=0}^p \prod_{l=1}^{3n} [f_{k,l}, g_{k,l}]$$

et les difféomorphismes $f_{k,l}$ et $g_{k,l}$ sont à support dans U_k .

Cette démonstration est une réalisation élémentaire de l'idée de Stefan Haller et Josef Teichmann de décomposer un difféomorphisme en produit de difféomorphismes préservant certains feuilletages (voir [30]). Elle repose de manière essentielle sur le théorème KAM d'Herman sur les difféomorphismes du cercle. On remarque que cette propriété démontre la perfection de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ et donc la simplicité de ce groupe. C'est donc une alternative à la preuve de Thurston et Mather (voir [9] ou [6]). La démonstration donne aussi la perfection locale (et donc la perfection) de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour n supérieur ou égal à 2 mais ne permet pas de conclure dans le cas $n = 1$.

D'après le lemme de fragmentation (voir [30] proposition 1 ou [9] théorème 2.2.1 pour une démonstration), pour tout réel $\eta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout élément h de $\text{Diff}_0^\infty(M)$, si $d(h, Id_M) < \alpha$, alors il existe une famille $(h_i)_{0 \leq i \leq p}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ telle que :

$$\begin{cases} \text{supp}(h_i) \subset U_i \\ h = \prod_{i=0}^p h_i \\ \forall i \in [0, p] \cap \mathbb{N}, d(h_i, Id_M) < \eta \end{cases}.$$

Il reste à effectuer la construction suivante. On se donne U, V , deux ouverts de

\mathbb{R}^n , où U est un cube d'adhérence incluse dans V , et un voisinage Ω de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(V)$. Nous allons montrer l'existence d'un voisinage Ω' de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(U)$ tel que, pour tout difféomorphisme f de Ω' , il existe des difféomorphismes f_1, f_2, \dots, f_{3n} dans Ω tels que :

$$f = [f_1, f_2] \circ [f_3, f_4] \circ \dots \circ [f_{3n-1}, f_{3n}].$$

Pour montrer cette dernière propriété, la stratégie sera la suivante : on va commencer par décomposer un difféomorphisme f proche de l'identité en tant que produit de n difféomorphismes qui préservent chacun les feuilles d'un feuilletage en droites. Chacun de ces feuilletages en droites de U va être considéré comme une partie d'un feuilletage en cercles d'un anneau inclus dans V . Il suffira ensuite d'appliquer (soigneusement) le théorème d'Herman sur les difféomorphismes du cercle pour conclure que chacun des difféomorphismes apparaissant dans la décomposition de f s'écrit comme produit de deux commutateurs constitués d'éléments qui peuvent être choisis aussi proche que l'on veut de l'identité tant que f est suffisamment proche de l'identité.

Détaillons maintenant les arguments ci-dessus. Pour un entier k entre 1 et n , on note F_k le feuilletage constitué de l'ensemble des droites parallèles au k -ième axe de coordonnées. On note $\text{Diff}_0^\infty(U, F_k)$ l'ensemble des difféomorphismes de U à support compact et compactement isotopes à l'identité qui préservent les feuilles du feuilletage F_k . Construisons par récurrence sur k une application définie et continue sur un voisinage de l'identité $\phi_k : \text{Diff}_0^\infty(U) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(U, F_k)$ telle que $\phi_k(\text{Id}_U) = \text{Id}_U$ et telle que, pour un difféomorphisme f suffisamment proche de l'identité :

$$p_k \circ f \circ \phi_1(f)^{-1} \circ \phi_2(f)^{-1} \circ \dots \circ \phi_k(f)^{-1} = p_k,$$

où p_k désigne la projection sur les k premières coordonnées. Supposons $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ construites. Posons, pour un difféomorphisme f de $\text{Diff}_0^\infty(U)$ proche de l'identité et pour x dans U :

$$f \circ \phi_1(f)^{-1} \circ \phi_2(f)^{-1} \circ \dots \circ \phi_k(f)^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_k, f_{k+1}(x), f_{k+2}(x), \dots, f_n(x)).$$

On définit alors ϕ_{k+1} par :

$$\forall x \in U, \phi_{k+1}(f)(x) = (x_1, \dots, x_k, f_{k+1}(x), x_{k+2}, \dots, x_n)$$

pour f suffisamment proche de l'identité, ce qui conclut la récurrence. Les applications ϕ_k ainsi construites sont C^∞ , valent l'identité en l'identité et vérifient :

$$f = \phi_n(f) \circ \phi_{n-1}(f) \circ \dots \circ \phi_1(f).$$

Fixons un entier k . On considère comme prévu un plongement :

$$\psi_k : \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow V$$

qui envoie $(-1, 1)^{k-1} \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-1, 1)^{n-k}$ sur U et le feuilletage constitué des droites parallèles au k -ième axe de coordonnées de $(-1, 1)^{k-1} \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-1, 1)^{n-k}$ sur le feuilletage constitué des droites parallèles au k -ième axe de coordonnées de U . Le difféomorphisme $\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k$ est alors identifiable à une famille (à $n-1$ paramètres) de difféomorphismes du cercle. On écrit pour des éléments (x, t, y) de $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k(x, t, y) = (x, g(x, y)(t), y),$$

où $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est une application continue qui vérifie :

$$g(x, y) = Id$$

lorsque $(x, y) \notin [-1, 1]^{n-1}$.

Il reste à écrire $g(x, y)$ en tant que produit de commutateurs d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ proches de l'identité qui dépendent de manière C^∞ de x et de y , dont les dérivées par rapport à x et à y sont petites et qui valent l'identité lorsque $(x, y) \notin (-2, 2)^{n-1}$.

Le lemme suivant est dû à Haller et Teichmann (voir [31], exemple 3) :

Lemme A.2. *Pour tout voisinage W' l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, il existe un voisinage W de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, des difféomorphismes A, B et C de W' et des applications*

$$a, b, c : W \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

de classe C^∞ , qui valent l'identité en l'identité, et vérifient, pour tout h de W :

$$h = [a(h), A][b(h), B][c(h), C].$$

Remarque. La démonstration de ce résultat repose sur le théorème d'Hermann pour les difféomorphismes du cercle. De plus, on peut supposer que A, B, C sont des éléments de $PSL_2(\mathbb{R}) \subset \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Fin de la démonstration du théorème. Notons $\lambda : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ à support dans $(-2, 2)^{n-1}$ qui vaut 1 sur un voisinage de $[-1, 1]^{n-1}$. On choisit alors un voisinage W' de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de sorte que, pour tout difféomorphisme D de W' , si l'on note \tilde{D} l'application définie par :

$$\forall (x, t, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad \tilde{D}(x, t, y) = (x, \lambda(x, y)D(t) + (1 - \lambda(x, y))t, y),$$

alors \tilde{D} est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-k}$ à support compact et $\psi_k \circ \tilde{D} \circ \psi_k^{-1}$ appartient au voisinage Ω de l'identité dans $\text{Diff}_0^\infty(V)$.

Lorsque f est suffisamment proche de l'identité, $g(x, y)$ appartient, pour tous x et y , au voisinage W de l'identité donné par le lemme précédent. On obtient alors que, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$g(x, y) = [a(g(x, y)), A][b(g(x, y)), B] \circ [c(g(x, y)), C]$$

puis que

$$g(x, y) = [a(g(x, y)), \tilde{A}(x, y)][b(g(x, y)), \tilde{B}(x, y)] \circ [c(g(x, y)), \tilde{C}(x, y)]$$

En effet, sur $[-1, 1]^{n-1}$, on a $\tilde{A}(x, y) = A$, $\tilde{B}(x, y) = B$ et $\tilde{C}(x, y) = C$, et, hors de $[-1, 1]^{n-1}$, les deux membres de l'égalité valent l'identité. Ainsi, le difféomorphisme $\psi_k^{-1} \circ \phi_k(f) \circ \psi_k$ s'écrit comme produit de 3 commutateurs d'éléments de Ω , lorsque f est suffisamment proche de l'identité. Un difféomorphisme f proche de l'identité s'écrit alors comme produit de $3n$ commutateurs d'éléments de Ω , ce qui démontre le théorème.

Appendix B

Appendix: a C^0 -fragmentation lemma for diffeomorphisms

In this appendix, we will prove the following general proposition:

Proposition B.1. *Let M be a compact surface, possibly with boundary and $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ be a finite open covering of M . Denote by d a distance on $\text{Homeo}_0(M)$ compatible with the C^0 -topology. Then, for every $\epsilon > 0$, there exists $\alpha > 0$ such that, given a diffeomorphism f in $\text{Diff}_0^r(M)$ satisfying $d(f, \text{Id}_M) < \alpha$, there exist diffeomorphisms f_1, f_2, \dots, f_n such that:*

- $f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$.
- for every index i , $\text{supp}(f_i) \subset U_i$.
- $d(f_i, \text{Id}_M) < \epsilon$.

To prove this proposition, we will need the following extension lemma.

The half-closed disk is the subset of \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ and } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lemma B.1. *Let U be an open set, F be a closed set in M and N be an open neighbourhood of F . Let K be a subset of U which is C^∞ -diffeomorphic to a closed disc if $K \cap \partial M = \emptyset$ or to a half-closed disk if $K \cap \partial M \neq \emptyset$. Then, for every $\epsilon > 0$, there exists $\beta > 0$ such that, given a diffeomorphism f in $\text{Diff}_0^r(M)$ satisfying $d(f, \text{Id}_M) < \beta$ and $f = \text{Id}_M$ on N , there exists a diffeomorphism g in $\text{Diff}_0^r(M)$ such that:*

- $\text{supp}(g) \subset U$.
- $f = g$ in a neighbourhood of K .
- $g = \text{Id}_M$ in a neighbourhood of F .
- $d(g, \text{Id}_M) < \epsilon$.

Let us see first how this lemma implies Proposition B.1.

Proof of Proposition B.1. First, we claim that it suffices to prove the proposition when each open set U_i is homeomorphic to an open disc. Indeed, suppose the proposition

holds for a covering by open disks. Take an arbitrary finite covering $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Then we can find a covering by open disks $D_{i,j}$ with $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq k_i$ such that $D_{i,j}$ is included in U_i . Then, if f is a diffeomorphism of M sufficiently close to the identity, there exist diffeomorphisms $f_{i,j}$ close to the identity such that:

$$\begin{cases} \text{supp}(f_{i,j}) \subset D_{i,j} \\ f = f_{1,1} \circ f_{1,2} \circ \dots \circ f_{1,k_1} \circ f_{2,1} \circ \dots \circ f_{n,k_n} \end{cases}.$$

It suffices to take $f_i = f_{i,1} \circ f_{i,2} \circ \dots \circ f_{i,k_i}$ to conclude the proof for an arbitrary finite covering.

Suppose now that each open set U_i is homeomorphic to an open disc. For each index i , take a subset K_i of U_i diffeomorphic to a closed disc in such a way that:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} K_i = M.$$

We show by induction on i the following statement (the case $i = n$ proves Lemma B.1): for every $\epsilon > 0$, there exists $\alpha > 0$ such that, given a diffeomorphism f in $\text{Diff}_0^r(M)$ satisfying $d(f, Id_M) < \alpha$, there exist diffeomorphisms f_1, f_2, \dots, f_i in $\text{Diff}_0^r(M)$ such that:

1. $f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_i$ in a neighbourhood of $\bigcup_{j \leq i} K_j$.
2. $\forall j \leq i, \text{supp}(f_j) \subset U_j$.
3. $d(f_j, Id_M) < \epsilon$.

The above statement is true for $i = 1$ by lemma B.1. Suppose the above statement holds for an integer i . Fix $\epsilon > 0$. Let β be given by Lemma B.1 applied with $F = \bigcup_{j \leq i} K_j$, $K = K_{i+1}$ and $U = U_{i+1}$. Using the induction hypothesis for small enough ϵ' , there exists $\alpha > 0$ such that if we take a diffeomorphism f α -close to the identity, we can get a family of diffeomorphisms $(f_j)_{1 \leq j \leq i}$ which satisfies 1., 2., and 3. and such that $f_i^{-1} \circ f_{i-1}^{-1} \circ \dots \circ f_1^{-1} \circ f$ is β -close to the identity. By Lemma B.1, we can find a diffeomorphism f_{i+1} in $\text{Diff}_0^r(M)$ such that :

1. $\text{supp}(f_{i+1}) \subset U_{i+1}$.
2. $f_{i+1} = f_i^{-1} \circ f_{i-1}^{-1} \circ \dots \circ f_1^{-1} \circ f$ in a neighbourhood of K_{i+1} .
3. $f_{i+1} = Id_M$ in a neighbourhood of $\bigcup_{j \leq i} K_j$.
4. $d(f_{i+1}, Id_M) < \epsilon$.

The properties 2. and 3., together with the induction hypothesis imply then that $f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{i+1}$ on a neighbourhood of $\bigcup_{j \leq i+1} K_j$. This concludes the proof. \square

To prove Lemma B.1, we need some specific extension lemmas. The first lemma is proved in the appendix of [15] by M. Khanevsky.

Lemma B.2. *Let $\epsilon > 0$, $\epsilon_1 \in (0, 1)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Consider a finite union of closed intervals $I \subset \mathbb{S}^1$. Then there exists $\alpha > 0$ such that, for every C^r -embedding $f : \mathbb{S}^1 \times (-\epsilon_1, \epsilon_1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ which satisfies:*

$$\begin{cases} d(f, Id) < \alpha \\ f|_{I \times (-\epsilon_1, \epsilon_1)} = Id \end{cases},$$

there exists a diffeomorphism g in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{S}^1 \times (-1, 1))$ such that:

1. $d(g, Id) < \epsilon$
2. $g|_{\mathbb{S}^1 \times 0} = f|_{\mathbb{S}^1 \times 0}$
3. $g|_{I \times (-1,1)} = Id$.

The following lemma deals with embeddings of the annulus which preserve a circle.

Lemma B.3. *Let $\epsilon_1 \in [0, 1)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ and I denote a finite union of closed intervals in \mathbb{S}^1 . Denote by f a C^r -embedding of $\mathbb{S}^1 \times (-\epsilon_1, \epsilon_1)$ in $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ which fixes pointwise $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ and $I \times (-\epsilon_1, \epsilon_1)$. Then, for any $\epsilon > 0$, there exists a diffeomorphism g in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{S}^1 \times (-1, 1))$ fixing pointwise $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ which satisfies:*

1. $g = f$ in a neighbourhood of $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$.
2. $d(g, Id) < \epsilon$
3. $g|_{I \times (-1,1)} = Id$.

Proof. Consider $\epsilon' > 0$ such that the product of two diffeomorphisms in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ ϵ' -close to the identity is ϵ -close to the identity. We will first find a diffeomorphism g_1 ϵ' -close to the identity which preserves the foliation with leaves $\mathbb{S}^1 \times \{y\}$ and for which, for $\epsilon_2 > 0$ small enough, $g_1^{-1} \circ f$ preserves the germ at $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ of the foliation with leaves $\{x\} \times (-1, 1)$. Then, we will find a diffeomorphism g_2 ϵ' -close to the identity which equals to $g_1^{-1} \circ f$ on a neighbourhood of $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ and take $g = g_1 \circ g_2$.

Take $\delta_1 < \epsilon_1$ such that f^{-1} is well defined on $\mathbb{S}^1 \times (-\delta_1, \delta_1)$ and, if the expression of f^{-1} in coordinates is given by:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{S}^1 \times (-\delta_1, \delta_1) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned} ,$$

then:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{S}^1 \times (-\delta_1, \delta_1), \left\{ \begin{array}{l} |u(x, y) - x| < \epsilon' \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) > 0 \end{array} \right. .$$

Denote by u_y^{-1} the inverse of $u(\cdot, y)$. Denote by $\lambda : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$ a C^∞ map which is supported in $(-\delta_1, \delta_1)$ and is equal to one on a neighbourhood of 0. Now, define:

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{S}^1 \times (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto (\lambda(y)u_y^{-1}(x) + (1 - \lambda(y))x, y) \end{aligned} .$$

In other words, when y is close to 0, $g_1(x, y)$ is the point with ordinate y which meets $f(\{x\} \times (-\delta_1, \delta_1))$. For $\epsilon_2 > 0$ small enough, the map g_1 satisfies then the following properties:

1. $\forall x \in \mathbb{S}^1, g_1^{-1} \circ f(\{x\} \times (-\epsilon_2, \epsilon_2)) \subset \{x\} \times (-1, 1)$.
2. $d(g_1, Id) < \epsilon$.
3. $g_1|_{I \times (-1,1)} = Id$.

Now the expression of the embedding $f_1 = g_1^{-1} \circ f$ in coordinates is of the form:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{S}^1 \times (-\epsilon_2, \epsilon_2) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto (x, w(x, y)) \end{aligned} .$$

Consider the isotopy, defined for t in $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{S}^1 \times (-\epsilon_1, \epsilon_1) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto (x, (1-t)y + tw(x, y)) \end{aligned} .$$

The vector field associated to this isotopy is:

$$X(t, x, y) = \frac{d}{dt}(f_t)(f_t^{-1}(x, y)).$$

It is defined for all t in a time-independent neighbourhood of $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ which we denote by $\mathbb{S}^1 \times (-\delta_2, \delta_2)$. Observe that this vector field vanishes on $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ and on $I \times (-\delta_2, \delta_2)$. Take $0 < \delta_3 < \delta_2$ such that:

$$\sup_{(t,x,y) \in [0,1] \times \mathbb{S}^1 \times (-\delta_3, \delta_3)} \|X(t, x, y)\| < \epsilon'.$$

Now, let $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a C^∞ function supported in $(-\delta_3, \delta_3)$ which is equal to 1 on a neighbourhood of 0. Define a vector field Y on $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ for t in $[0, 1]$ by:

- $Y(t, x, y) = \lambda(y)X(t, x, y)$ if $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times (-\delta_3, \delta_3)$.
- $Y(t, x, y) = 0$ otherwise.

Then, if we denote by g_2 the time 1 of the flow of Y , the diffeomorphism g_2 satisfies the following properties:

1. $g_2 = f_1$ in a neighbourhood of $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$.
2. $d(g_2, Id) < \epsilon'$.
3. $g_2|_{I \times (-1,1)} = Id$.

Now, the diffeomorphism $g = g_1 \circ g_2$ satisfies the required properties. \square

Now, we are ready to prove Lemma B.1 in the case where $K \cap \partial M = \emptyset$.

Proof of Lemma B.1 in the case where $K \cap \partial M = \emptyset$. Consider a tubular neighbourhood of ∂K sufficiently small so that, after identification of this neighbourhood with $\partial K \times (-1, 1) \subset U$, there exists I , a finite union of intervals of ∂K , such that $F \cap \partial K \times (-1, 1) \subset I \times (-1, 1) \subset N$. Choose $\epsilon' > 0$ so that the product of two diffeomorphisms in $\text{Diff}_0^r(M)$ ϵ' -close to the identity for the C^0 distance d is ϵ' -close to the identity. By applying successively Lemmas B.2 and B.3 to a diffeomorphism f sufficiently close to the identity, we find a diffeomorphism g_1 with support included in U which satisfies:

$$\begin{cases} d(g_1, Id) < \epsilon' \\ d(g_1^{-1} \circ f, Id) < \epsilon' \end{cases} ,$$

, which coincides with f in a neighbourhood of ∂K and which fixes a neighbourhood of F . Denote by g_2 the diffeomorphism which is equal to $g_1^{-1} \circ f$ on K and to the identity elsewhere. The diffeomorphism $g = g_1 \circ g_2$ satisfies then the required properties. \square

To prove the case $K \cap \partial M \neq \emptyset$ in Lemma B.1, we need a few extra lemmas.

Lemma B.4. *Let J be an open interval in \mathbb{R} , J' be a closed subinterval of J and I be a finite union of closed intervals in \mathbb{R} . For any $\epsilon > 0$, there exists $\alpha > 0$ such that, given a C^r increasing embedding $f : J \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times [0, 1)$ with:*

- $d(f, Id) < \alpha$
- $f|_{I \cap J} = Id$,

there exists a diffeomorphism g in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R} \times [0, 1))$ which satisfies:

1. $g|_{J' \times \{0\}} = f|_{J' \times \{0\}}$.
2. $d(g, Id) < \epsilon$.
3. $g|_{I \times [0, 1)} = Id$.

Proof. Let us take $\alpha < \min(\epsilon, d(J', J^c))$, where J^c is the complementary of J in \mathbb{R} . Take an embedding f as in the hypothesis of the lemma. Consider the isotopy:

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times J \times [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1) \\ (x, y) &\mapsto ((1-t)x + tf(x), y) \end{aligned}$$

and denote by h_t the embedding $h(t, \cdot)$. The vector field associated with this isotopy is:

$$X(t, x, y) = \frac{d(h_t)}{dt}(h_t^{-1}(x, y)).$$

Notice that $X(t, \cdot)$ is defined on $h_t(J \times [0, 1))$ which contains a neighbourhood of $J' \times [0, 1)$ by the choice of α . Then, by multiplying X by a C^∞ function supported in a neighbourhood of $J' \times [0, \frac{1}{2}]$ and which is equal to one on a smaller neighbourhood of $J' \times [0, \frac{1}{2}]$, we obtain a compactly supported vector field on $\mathbb{R} \times [0, 1)$ whose time one flow satisfies the required properties. \square

The following lemma is analogous to Lemma B.3.

Lemma B.5. *Let $\epsilon_1 \in [0, 1)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, J be an open interval in \mathbb{R} , J' be a closed interval included in J and I denote a finite union of closed intervals in \mathbb{R} . Denote by f a C^r -embedding of $J \times [0, \epsilon_1)$ in $\mathbb{R} \times [0, 1)$ which fixes pointwise $J \times \{0\}$ and $I \cap J \times [0, \epsilon_1)$. Then, for any $\epsilon > 0$, there exists a diffeomorphism g in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R} \times [0, 1))$ fixing pointwise $\mathbb{R} \times \{0\}$ which satisfies:*

1. $g = f$ in a neighbourhood of $J' \times \{0\}$.
2. $d(g, Id) < \epsilon$.
3. $g|_{I \times [0, 1)} = Id$.

Proof. This proof is almost the same as the proof of Lemma B.3. Consider $\epsilon' > 0$ such that the product of two diffeomorphisms in $\text{Diff}_0^r(\mathbb{R} \times [0, 1))$ ϵ' -close to the identity is ϵ -close to the identity. We will first find a diffeomorphism g_1 ϵ' -close to the identity which preserves the foliation with leaves $\mathbb{R} \times \{y\}$ and for which, for $\epsilon_2 > 0$ small enough

and x in a neighbourhood of J' , $g_1^{-1} \circ f(\{x\} \times [0, \epsilon_2)) \subset \{x\} \times (-1, 1)$. Then we will find a diffeomorphism g_2 ϵ' -close to the identity which equals $g_1^{-1} \circ f$ on a neighbourhood of $J' \times \{0\}$ and take $g = g_1 \circ g_2$. Suppose the expression of f^{-1} in coordinate is given by:

$$\begin{aligned} f^{-1} : J \times [0, \epsilon_1) &\rightarrow \mathbb{R} \times (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

Take $\delta < \epsilon_1$ and an open interval J'' with $J' \subset J'' \subset \overline{J''} \subset J$ such that:

$$\forall (x, y) \in J'' \times [0, \delta), \begin{cases} |u(x, y) - x| < \epsilon' \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) > 0 \end{cases}.$$

Denote by u_y the function $u(., y)$. Let $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a C^∞ function supported in $(-\delta, \delta)$ and which is equal to one in a neighbourhood of 0. Consider the embedding:

$$\begin{aligned} h : J'' \times [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1) \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} ((1 - \lambda(y))y + \lambda(y)u_y^{-1}(x), y) & \text{if } y \leq \delta \\ (x, y) & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

It coincides with f on a neighbourhood of $J'' \times \{0\}$. We now have to extend it in the horizontal direction in order to have a diffeomorphism. To do this, we consider the isotopy (for t in $[0, 1]$):

$$\begin{aligned} h_t : J'' \times [0, 1) &\rightarrow J'' \times [0, 1) \\ (x, y) &\mapsto ((1 - t)x + tu'(x, y), y) \end{aligned}$$

where u' is the first coordinate of h . It suffices then to cut the vector field generating this isotopy by a C^∞ function to obtain a compactly supported vector field defined on $\mathbb{R} \times [0, 1)$. Then the time one of the flow of this vector field gives a diffeomorphism g_1 of $\mathbb{R} \times [0, 1)$ which satisfies the following properties:

1. for x in a neighbourhood of J' , $g_1^{-1} \circ f(\{x\} \times [0, \epsilon_2)) \subset \{x\} \times [0, 1)$.
2. $d(g_1, Id) < \epsilon'$.
3. $g_1|_{I \times [0, 1)} = Id$.

The construction of g_2 is done exactly the same way as in Lemma B.3 : consider a well-chosen isotopy which joins the identity to $f_1 = g_1^{-1} \circ f$, the vector field generating it and cut this vector field outside a neighbourhood of $J' \times \{0\}$ to get a global compactly supported vector field. Take the time one of the flow of this vector field. Then, it suffices to take $g = g_1 \circ g_2$. \square

Now, we can finish the proof of Lemma B.1 by treating the case where $K \cap \partial M \neq \emptyset$.

Proof of Lemma B.1: case where $K \cap \partial M \neq \emptyset$. We will just explain what has to be taken care of in this proof which is analogous to the proof of the case where $\partial K \cap M = \emptyset$. Take the diffeomorphism f sufficiently close to the identity. By using Lemma B.4, we may find a diffeomorphism g_1 C^0 -close to the identity which coincides with f on a neighbourhood in ∂M of $\partial K \cap \partial M$. Then, we use Lemma B.5 to get a diffeomorphism g_2 C^0 -close to the identity which coincides with $g_1^{-1} \circ f$ on a neighbourhood V in M of

$\partial K \cap \partial M$. Let W be a neighbourhood of $\partial K \cap \partial M$ whose closure is included in V . Consider then a simple closed path $\gamma : \mathbb{S}^1 = [0, 1]/\mathbb{Z} \rightarrow M$ which satisfies:

$$\begin{cases} \gamma([- \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]) \supset \partial K - W \\ \gamma(\mathbb{S}^1) \subset (\partial K \cup W) - \partial M \end{cases} .$$

By applying the first case of Lemma B.1 with K' the interior of the Jordan curve γ and F' the union of F with the closure of W , we may find a C^r -diffeomorphism g_3 C^0 -close to the identity which is equal to $g_1^{-1} \circ f$ in a neighbourhood of K . Then we take $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ to end the proof. \square

Table des figures

1.1	Preuve du théorème de Fischer-Mather-Thurston	11
2.1	Lemme 2.3 : (P2) \Rightarrow (P1)	29
2.2	Preuve du lemme 2.5 : action de l'homéomorphisme f_1 sur la courbe β .	31
2.3	Au revêtement universel : construction d'une courbe c qui vérifie les hypothèses du lemme 2.5	32
3.1	Situation où le lacet β n'est pas croissant vis-à-vis de α	42
4.1	A diffeomorphism f which sends the curve c to the curve c' satisfies $\rho(f) = 2$	47
4.2	Description of the curve c	51
4.3	Description of the homeomorphism φ	52
5.1	Notations	67
5.2	Les différents difféomorphismes qui apparaissent dans la preuve	68
6.1	Le domaine D_0 dans quelques cas	75
6.2	Lemme 6.20	84
6.3	Preuve du lemme 6.21 : description de l'homéomorphisme φ	85
6.4	Notations de la preuve du lemme 6.19	86
6.5	Les différents homéomorphismes qui apparaissent dans la preuve du lemme 6.19	88
6.6	Notations dans le cas des surfaces à bord	90
6.7	Illustration de la preuve du lemme 6.22	91
6.8	Preuve du lemme 6.23 : les homéomorphismes g_1 et g_2	96

6.9	Notations dans le cas des surfaces de genre supérieur	104
6.10	Les D_i^j pour une surface de genre 2	107
6.11	Idée de la preuve du lemme 6.36 : la face $D(j, M)$	111
6.12	Illustration de la preuve du lemme 6.38	116
6.13	Fin de la preuve du lemme 6.29	119
6.14	Représentation de l'action de $g_2 \circ g_1$	129

Bibliographie

- [1] K. Abe, K. Fukui, *Commutators of C^1 -diffeomorphisms preserving a submanifold*, J Math Soc Japan 61 (2009), 427-436.
- [2] R.D. Anderson, *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, American Journal of Mathematics, Vol 80, No 4 (Oct, 1958), 955-963.
- [3] A. Avila, *Distortion elements in $\text{Diff}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$*
Disponible sur arXiv :08082334
- [4] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) 37 (1991), no 1-2, 109-150.
- [5] F. Beguin, S. Crovisier, F. Le Roux, A. Patou, *Pseudo-rotations of the closed annulus : variation on a theorem of J. Kwapisz*, Nonlinearity 17 (2004), 1427-1453.
- [6] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
- [7] J. Barge, E. Ghys, *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math Ann 294 (1992), 235-265
- [8] F. Béguin, Notes d'un mini-cours donné à l'école d'été Dynamique sur les surfaces : méthodes topologiques, à l'Institut Fourier, en juin 2006 Disponible sur la page web de François Béguin.
- [9] A. Bounemoura *Simplicité des groupes de transformations de surface*, Ensaos Matematicos, vol. 14 (2008), 1-143.
- [10] M. R. Bridson, K. Vogtman, *Actions of automorphism groups of free groups on homology spheres and acyclic manifolds*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), no 1, 73-90.
- [11] D. Burago, S. Ivanov, L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, in *Groups of diffeomorphisms : In Honor of Shigeyuki Morita on the Occasion of His 60th Birthday*, Advanced studies in Pure Mathematics 52, Math. Society of Japan, Tokyo, 2008.
- [12] D. Calegari, *scl*, MSJ Memoirs vol.20.
- [13] D. Calegari, M.H. Freedman, *Distortion in transformation groups* With an appendix by Yves de Cornulier, Geom. Top. 16 (2006), 267-293.
- [14] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann, *Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphisms of the circle*, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 638-660.
- [15] M. Entov, L. Polterovich, P. Py, *On continuity of quasi-morphisms for symplectic maps*, Available on arXiv :09041397v1.
- [16] M. Entov, L. Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology*, Int. Math. Res. Not., no 30 (2003), 1635-1676.

- [17] D.B.A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. 115 (1966), 83-107.
- [18] B. Farb, A. Lubotzky, Y. Minsky, *Rank 1 phenomena for mapping class groups*, Duke Math. J. 106, no 3 (2001), 581-597.
- [19] A. Fathi, *Structure of the homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold*, Annales scientifiques de l'ÉNS 4^e série, tome 13, no1 (1980), 45-93.
- [20] A. Fathi, M. R. Herman, *Existence de difféomorphismes minimaux*, Astérisque 49 (1977), 37-59.
- [21] R.P. Filipkiewicz, *Isomorphisms between diffeomorphism groups*, Ergodic Th. and Dyn. Sys. 2 (1982), no 2, 159-171.
- [22] G.M. Fischer, *On the group of all homeomorphisms of a manifold*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 97 (1960), 193-212.
- [23] J. Franks, *Distortion in groups of circle and surface diffeomorphisms*, Dynamique des difféomorphismes conservatifs des surfaces : un point de vue topologique, Panor. Synthèses 21 (2006), 35-52.
- [24] J. Franks, M. Handel, *Distortion elements in group actions on surfaces*, Duke Math. J. 131 (2006), no 3, 441-468.
- [25] J. Franks, M. Misiurewicz, *Rotation sets of toral flows*, Proc Amer. Math. Soc. 109 (1990), no 1, 243-249.
- [26] J.-M. Gambaudo, E. Ghys, *Commutators and diffeomorphisms of surfaces*, Ergodic Th. and Dyn. Sys. 24 (2004), no 5, 1591-1617.
- [27] E. Ghys, *Groups acting on the circle*, L'Enseignement Mathématique, vol.47 (2001), 329-407.
- [28] E. Ghys, *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée*, The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), Contemp. Math. 58 III, Amer Math. Soc. (1987), 81-106.
- [29] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics 83. Birkhäuser Boston, 1990.
- [30] S. Haller, T. Rybicki, J. Teichmann, *Smooth perfectness for the group of diffeomorphisms*, Disponible sur arXiv :math/0409605.
- [31] S. Haller, J. Teichmann, *Smooth perfectness through decomposition of diffeomorphisms into fiber preserving ones*, Ann. Global. Anal. Geom. 23 (2003), 53-63.
- [32] M. R. Herman, *Construction of some curious diffeomorphisms of the Riemann sphere*, J. London Math. Soc. (2) 34 (1986), 375-384.
- [33] M.R. Herman, *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann. Inst. Fourier 23-2 (1973), 75-86.
- [34] R.C. Kirby, *Stable homeomorphisms and the annulus conjecture*, Ann. of Math. 2nd Ser. 89 (3) (1969), 575-582.
- [35] F. Le Roux, *Simplicity of $\text{Homeo}(D^2, \partial D^2, \text{Area})$ and fragmentation of symplectic diffeomorphisms*, J. Symplectic Geom. vol.8, no 1 (2010), 73-93.
- [36] M.W. Liebeck, E.A. O'Brien, A. Shalev, Tiep Pham Huu, *The Ore conjecture*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 12 (2010), no 4, 939-1008.
- [37] A. Lubotzky, S. Mozes, M.S. Raghunathan, *The word and Riemannian metric on lattices in semisimple Lie groups*, IHES Publ Math 91 (2000), 5-53.

- [38] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [39] J.N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms I*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 512-528.
- [40] J.N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms II*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 33-40.
- [41] S. Matsumoto, *Numerical invariants for semiconjugacy of homeomorphisms of the circle*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 98 (1986), no 1, 163-168.
- [42] E. Militon, *Commutator length of annulus diffeomorphisms*, accepté dans Erg. Theor. and Dyn. Sys., disponible sur arXiv :1005.1765.
- [43] E. Militon, *Distortion elements for surface homeomorphisms*, disponible sur arXiv :1207.0291.
- [44] E. Militon, *Éléments de distortion de $\text{Diff}_0^\infty(M)$* , accepté dans le Bulletin de la SMF, disponible sur arXiv :1105.4443.
- [45] S. Matsumoto, S. Morita, *Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), no 3, 539-544.
- [46] C. F. Novak, *Discontinuity growth of interval exchange maps*, J. Mod. Dyn. 3 (2009), no 3, 379-405.
- [47] P. Py, *Quasi-morphisms et invariant de Calabi*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) vol.39 (2006), No 1, 177-195.
- [48] L. Polterovich, *Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry*, Invent. Math. 150 (2002), 655-686.
- [49] F. Quinn, *Ends of maps III : Dimensions 4 and 5*, J. Differential Geom. 17 (1982), 503-521.
- [50] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of diffeomorphism groups*, in *Groups of diffeomorphisms : In Honor of Shigeyuki Morita on the Occasion of His 60th Birthday*, Advanced studies in Pure Mathematics 52, Math. Society of Japan, Tokyo, 2008.
- [51] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds*, Commentarii Mathematici Helvetici 87 (2012), no 1, 141-185.
- [52] T. Tsuboi, *Homeomorphism groups of commutator width one*, prépublication de l'université de Tokyo, UTMS 2011-17.
- [53] J.V. Whittaker, *On isomorphic groups and homeomorphic spaces*, Annals of Math. 78 (1963), no 1, 74-91.
- [54] D. Witte, *Arithmetic Groups of Higher Q -rank Cannot Act on 1-manifolds*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 122 (1994), 333-340.